

ETUDE EN REGIME DE COUCHE LIMITE DE LA CONVECTION PENETRANTE A L'INTERIEUR D'UN PUITTS CYLINDRIQUE VERTICAL DEBOUCHANT DANS UN LARGE RESERVOIR

AKOWANOU C.¹, DEGAN G.¹, GIBIGAYE M.¹, C. N. AWANOU C. N.²

1- Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées (LEMA)/EPAC-UAC

2- Laboratoire de Physique de Rayonnement (LPR)/FAST-UAC.

(ger_degan@yahoo.fr)

(Reçu le 15 janvier 2008 ; Révisé le 27 mai 2008 ; Accepté le 03 juin 2008)

RESUME

On étudie analytiquement la couche limite en convection naturelle pénétrante dans un puits cylindrique vertical confinant un milieu poreux et débouchant à sa partie supérieure dans un large réservoir. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux orientés obliquement par rapport à la gravité. La surface latérale du cylindre est chauffée de façon isotherme pendant que le réservoir semi-infini reposant sur sa section supérieure est à une température relativement plus basse. Une solution analytique au problème, basée sur les approximations de couche limite a été trouvée en utilisant d'une part la méthode des relations intégrales et d'autre part la technique de linéarisation d'Oseen. Une analyse d'échelle à été réalisée pour prédire les ordres de grandeur des variables d'intérêt dans la couche limite. Les effets sur le transfert de chaleur des paramètres d'anisotropie en perméabilité et le nombre de Darcy-Rayleigh modifié ont été étudiés. Il ressort de cette étude que les paramètres d'anisotropie influencent fortement le taux de transfert de chaleur à travers le puits.

Mots clés : Couche limite, milieu poreux anisotrope, convection.

ABSTRACT

In this paper, natural convection heat transfer in a vertical cylindrical well filled with an anisotropic porous medium is studied analytically. The porous medium is assumed anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. The vertical side wall of the cylinder is isothermally heated while the semi-infinite reservoir situated above the wall is relatively colder. The governing equations are solved analytically, under the boundary-layer approximations, using an integral method of the type developed by Lighthill and an alternative method based on the Oseen linearization technique. Scale analysis is applied to predict the order of magnitudes involved in the boundary-layer regime. The effects of varying the modified-Darcy Rayleigh number, the anisotropic permeability ratio, and the orientation angle of the principal axes on the heat transfer are investigated. It is demonstrated that the anisotropic parameters of the porous matrix have a strong influence on the heat transfer rate through the well.

Key words: Boundary-layer, anisotropic porous medium, convection.

INTRODUCTION

La convection naturelle en milieu poreux saturé confiné est d'une grande importance dans les applications en ingénierie. Il existe en littérature plusieurs travaux relatifs au transfert de chaleur en milieu poreux confiné par un cylindre vertical. Minkowycz et Cheng [1] ont analysé l'écoulement convectif naturel le long d'un cylindre vertical baignant dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien. Le cylindre vertical est soumis à une

distribution de température variant en loi de puissance. Des solutions exactes et approchées basées sur des modèles affines ont été obtenues par ces auteurs en utilisant les approximations caractérisant le régime de couche limite. Vasantha et Nath [3] ont étudié numériquement, en utilisant la méthode des différences finies et la méthode de perturbations la couche limite thermique le long d'un cylindre isotherme imbibée dans un milieu poreux isotrope. De l'investigation menée, il résulte que l'épaisseur de la couche limite thermique croît lorsque le paramètre relatif au rayon de courbure du cylindre augmente. Bejan [4, 5] a étudié analytiquement

la convection naturelle dans un cylindre vertical à paroi imperméable confinant un milieu poreux et communiquant à un large réservoir à son extrémité supérieure. Cet auteur était le premier à montrer qu'un important modèle d'écoulement en régime affine révèle que la profondeur à laquelle la convection libre pénètre dans le puits est proportionnelle à la différence de température caractérisant l'écoulement.

Dans la plupart des études précitées, le milieu poreux est considéré homogène et isotrope. Ce ne sont là que des hypothèses simplificatrices introduites pour approcher la réalité. La prise en compte de l'anisotropie en perméabilité de la matrice solide du milieu poreux paraît déterminante pour une bonne modélisation du phénomène convectif.

L'anisotropie qui est généralement la conséquence d'une orientation préférentielle des directions principales du milieu poreux ou de la géométrie asymétrique des grains et des fibres est très présente dans plusieurs systèmes dans l'industrie et dans la nature.

Dans le monde environnant, nous rencontrons l'anisotropie en perméabilité dans les sols et dans les formations géologiques servant de réservoirs ou nappes aquifères. En effet, les fonds des rivières constituent des systèmes géologiques de structure anisotrope constituée de sédiments et de roches. Tel que expliqué par Bear [6], les sédiments se disposent généralement de sorte que la perméabilité dans la direction horizontale dans la couche poreuse résultante est plus élevée que celle dans les autres directions. Ces sols, constituant les lits des rivières, peuvent être assimilés à des milieux poreux submergés par un milieu fluide dont la surface libre perméable, en contact avec l'atmosphère est chauffée par le rayonnement solaire. Selon Neale [7] les milieux poreux rencontrés, particulièrement ceux résultant de la sédimentation géologique ont une structure anisotrope. On peut citer en plus des lits de rivières, les formations géologiques des sous-sols, les boues de forage, les lits de filtrage. La perméabilité détermine pour ces milieux, les propriétés macroscopiques de transport telles que la diffusivité, la conductivité qui sont toutes directionnelles. L'anisotropie est généralement une conséquence de l'orientation préférentielle et de la disposition asymétrique des particules constituant

ces milieux.

En dépit de tout ceci, la convection dans les milieux poreux anisotropes a reçu peu d'attention de la part des chercheurs. Castinel et Combarous [8] furent les premiers auteurs à mener une étude tant expérimentale que théorique sur la convection naturelle en milieu poreux anisotrope chauffé par les côtés et confiné par des surfaces isothermes et imperméables. L'effet des paramètres d'anisotropie sur le phénomène de convection a été étudié. Un critère pour l'apparition de la convection (le nombre de Rayleigh critique) a été développé par ses auteurs. Leurs études ont été poursuivies par Epherre [9] pour prendre en compte l'effet de l'anisotropie en conductivité thermique sur l'apparition des mouvements thermoconvectifs. Ces travaux ont été étendus par Kvernold et Tyvand [10] et Kibbin [11]. Ces auteurs ont établi que, pour un écoulement bidimensionnel dans une couche poreuse horizontale illimitée, le nombre de Nusselt dépend du quotient des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique. Tyvand et Storesletten [12] ont étudié les critères d'apparition de la convection dans une couche poreuse dont les axes principaux de perméabilité sont orientés obliquement par rapport à la gravité. L'écoulement convectif et le transfert de chaleur dans une cavité verticale confinant un milieu poreux hydrodynamiquement anisotrope avec des conditions aux limites variées a été étudié par Zhang [13], Degan et coll. [14], Degan et Vasseur [15, 16]. Ces auteurs ont analysé le problème en considérant une orientation arbitraire des directions principales de l'anisotropie en perméabilité par rapport aux axes de coordonnées. Ces auteurs ont observé que la convection naturelle est fortement influencée par le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux. Il a été aussi démontré qu'une perméabilité minimale dans la direction de la gravité, minimise le transfert de chaleur.

La présente étude traite du régime de couche limite en convection naturelle pénétrante dans un puits cylindrique vertical confinant un milieu poreux et débouchant à sa partie supérieure dans un large réservoir. Il sera recherché les effets des propriétés anisotropes du milieu poreux sur le transfert de chaleur dans le puits cylindrique. Une analyse d'échelle des équations gouvernantes sera d'abord faite pour élaborer la condition d'existence de cette couche limite dynamiques. Pour la résolution analytique des équations de couche limite, deux méthodes de résolution seront utilisées.

Nomenclature

a, b, c	constantes, équation (10)
c_p	chaleur spécifique à pression constante
\bar{g}	accélération gravitationnelle
k	conductivité thermique
\overline{K}	tenseur de la perméabilité, équation (8)
K_1, K_2	perméabilités suivant les axes principaux
K^*	rapport d'anisotropie en perméabilité, K_1/K_2
L	hauteur du puits cylindrique
p	pression
Nu	nombre de Nusselt
Ra_L	nombre de Darcy-Rayleigh, équation(25)
R_L	nombre de Darcy-Raleigh modifié, ($Ra_L/\sqrt{K^*}$)
T	température
\bar{V}	vitesse de filtration du fluide
u, v	composantes de la vitesse dans les directions x et y
x, r	coordonnées cylindriques

Lettres grecques

α	diffusivité thermique
β	coefficient d'expansion thermique du fluide
δ	épaisseur de la couche limite
ΔT	échelle caractéristique de la température
μ	viscosité dynamique du fluide
θ	angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
ρ	densité du fluide
$(\rho c_p)_f$	capacité calorifique du fluide
ζ	rayon de courbure de la couche poreuse dans la région centrale.

Exposants

'	variables physiques
~	variables dimensionnelles, équation (50)
—	variables physiques dimensionnelles, rela- tives à la méthode d'Oseen.

Indices

∞	relatif aux positons éloignées de la paroi latérale du puits cylindrique.
C	relatif à la région centrale du puits

FORMULATION MATHEMATIQUE

Le modèle physique tel qu'indiqué à la Figure 1 est constitué par un cylindre vertical bidimensionnel et de grande extension confinant un milieu poreux composé par une distribution éparsée de particules solides, le tout saturé par un fluide newtonien. Le puits de longueur L , s'ouvre par sa section supérieure dans un large réservoir semi-infini. A l'image de la situation rencontrée dans la nature, le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope. Les perméabilités le long des axes principaux de la matrice solide du milieu poreux sont K_1 et K_2 . L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport d'anisotropie K^* et l'angle θ que fait l'axe horizontal avec l'axe principal de perméabilité K_2 . Ainsi, la rotation des axes principaux autour de l'origine O est décrite par l'angle θ , conformément aux annotations de la figure 1. En conséquence, dans la présente analyse, les coordonnées polaires (r', x') seront utilisées dans l'étude de la structure du champ d'écoulement thermique qui de ce fait est à symétrie axiale. La surface latérale du cylindre est à la température T_1 , pendant que le réservoir semi-infini reposant sur sa section supérieure est à une température T_2 relativement plus basse ($T_2 < T_1$). Il résulte que cet état thermique différentiel donne naissance à un système physique potentiellement instable qui entraîne que l'écoulement convectif à l'intérieur du cylindre droit est tel que le fluide froid descend dans le puits par la région médiane de la section circulaire du cylindre tandis que le fluide chaud monte le long de la paroi interne chauffée du cylindre.

Le fluide saturant le milieu poreux est visqueux, incompressible et supposé en équilibre thermodynamique local en tout point avec le milieu poreux. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes, à l'exception de la densité dans le terme de poussée dans l'équation du mouvement (approximation de Boussinesq).

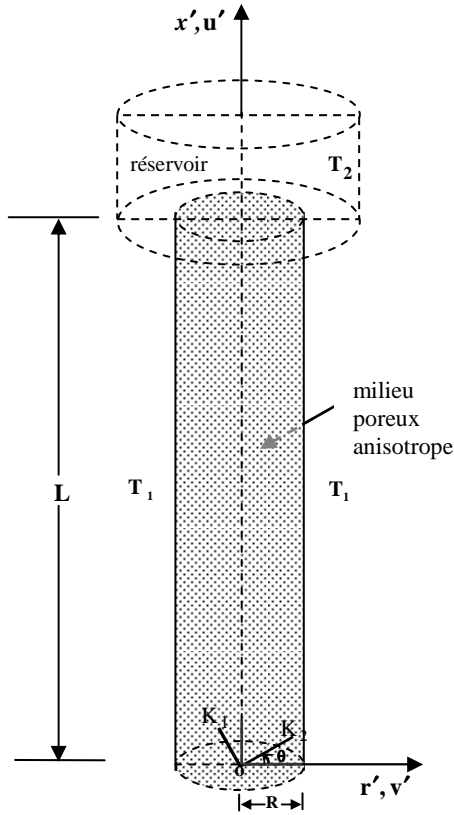


Figure 1 : Modèle physique et système de coordonnées.

Au regard des considérations précitées, les équations régissant l'écoulement laminaire bidimensionnelle dans le milieu poreux anisotrope, eu égard à la loi de Darcy généralisée (voir Bear [6]), s'écrivent comme suit:

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0 \quad (1)$$

$$\vec{V}' = -\frac{\bar{K}}{\mu} (\nabla p' + \rho \vec{g}) \quad (2)$$

$$(\rho c_p)_f \nabla \cdot (\vec{V}' T') = k \nabla^2 T' \quad (3)$$

Dans ces équations, \vec{V}' est la vitesse de filtration, T' la température, μ la viscosité dynamique, p' la pression du fluide, k la conductivité thermique, \bar{K} le tenseur de perméabilité. C'est un tenseur de second ordre qui s'exprime dans le système d'axes rotatifs autour de l'origine O de la façon suivante :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 \sin^2 \varphi + K_2 \cos^2 \varphi & (K_2 - K_1) \cos \varphi \sin \varphi \\ (K_2 - K_1) \cos \varphi \sin \varphi & K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dans le système de coordonnées cylindriques, les équations gouvernantes traduisant la conservation de la masse (1), la conservation de la quantité de mouvement (2) et la conservation de l'énergie (3), et l'équation d'état du fluide (approximation de Boussinesq) s'écrivent respectivement de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r'} (r' v') + \frac{\partial}{\partial x'} (r' u') = 0 \quad (5)$$

$$a u' - c v' = -\frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial x'} + \rho g \right) \quad (6)$$

$$-c u' + b v' = -\frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial r'} \right) \quad (7)$$

$$u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial r'} = \alpha \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right] \quad (8)$$

$$\rho = \rho_1 [1 - \beta (T' - T_1)] \quad (9)$$

où a, b, c sont des constantes qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos^2 \varphi + K^* \sin^2 \varphi, & b &= \sin^2 \varphi + K^* \cos^2 \varphi \\ c &= (1 - K^*) \sin \varphi \cos \varphi & K^* &= K_1 / K_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tenant compte de l'approximation de Boussinesq (9), et prenant le rotationnel des équations (6) et (7), on élimine le terme de pression dans ces équations et l'on aboutit à l'équation de mouvement qui s'écrit de la façon suivante :

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} + c \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) - b \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{K_1 g \beta}{\nu} \left(\frac{\partial T'}{\partial r'} \right) \quad (11)$$

Les conditions aux limites appropriées s'écrivent :

- la condition d'imperméabilité de la paroi latérale du puits cylindrique :

$$\begin{cases} x' = 0: & u' = 0 & (a) \\ r' = R: & v' = 0 & (b) \end{cases} \quad (12a)$$

- Les conditions thermiques sur la paroi latérale de cette enceinte cylindrique et sur la section supérieure droite de cette dernière en contact avec le réservoir s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} x' = 0: & T' = T_1 & (a) \\ r' = R: & T' = T_1 & (b) \end{cases} \quad (12b) \quad a \frac{\partial u'}{\partial r'} \gg c \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (16)$$

où R représente le rayon de la section droite du puits cylindrique.

Le nombre de Nusselt mesurant le transfert thermique entre le puits sur sa section supérieure droite et le réservoir a pour expression :

$$Nu = \frac{Q}{kL(T_1 - T_2)} \quad (13)$$

où Q est le flux de chaleur transférée à la couche poreuse contenue dans le cylindre. Ce flux de chaleur a pour expression :

$$Q = \int_0^R (\rho c_p)_f r' u' T' d(\pi r'^2) \quad (14)$$

A l'extrémité supérieure du puits cylindrique, sur sa section droite en contact avec le réservoir nous avons $x' = L$. Ainsi l'équation (14) peut être réécrite sous la forme :

$$Q = 2\pi(\rho c_p)_f \int_0^R r' u' T' dr' \quad (15)$$

ANALYSE D'ECHELLE ET CONDITIONS D'EXISTENCE

Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh ($Ra_L \rightarrow \infty$), l'écoulement a lieu en régime de couche limite. Dans la région centrale de la cavité cylindrique existe une zone chaude dont l'épaisseur mesure la couche poreuse à travers laquelle l'effet de la présence du réservoir se fait sentir. En raison de l'état thermique différentiel ($T_1 > T_2$) existant dans le milieu poreux, il se développe le long de la surface latérale du cylindre une couche limite dynamique d'épaisseur δ dans laquelle est concentrée la majeure partie du mouvement du fluide. A l'intérieur de cette dernière, nous ferons une analyse d'échelle pour prédire les ordres de grandeur des variables d'intérêt intervenant dans la présente étude.

Sur la base de l'équation de mouvement (11) et compte tenu de la grande extension du puits cylindrique ($R/L \ll 1$), en faisant les approximations usuelles en régime de couche limite, l'hypothèse de l'écoulement en régime en couche limite n'est valide que lorsque les conditions suivantes :

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} \gg c \frac{\partial v'}{\partial r'} \quad (17)$$

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} \gg b \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (18)$$

sont satisfaites.

Ainsi, suivant les approximations (16)-(18), l'équation de mouvement (11) devient :

$$a \frac{\partial u'}{\partial r'} = \frac{K_1 g \beta}{\nu} \left(\frac{\partial T}{\partial r'} \right) \quad (18)$$

En désignant par L et δ les échelles caractéristiques des variables x' et r' dans la couche limite ($\delta \ll L$), les équations (5), (18), et (8) requièrent les équivalences suivantes :

$$\frac{u'}{L} \sim \frac{v'}{R} \quad (19)$$

$$a \frac{u'}{\delta} \sim \frac{K_1 g \beta}{\nu} \frac{\Delta T}{\delta} \quad (20)$$

$$u' \frac{\Delta T}{L}, v' \frac{\Delta T}{\delta} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta^2} \quad (21)$$

où $\Delta T (= T_1 - T_2)$ est le facteur d'échelle de normalisation de la température.

En résolvant les équations (19)-(21) nous obtenons pour δ, u', v' , les équivalences suivantes:

$$\delta \sim L Ra_L^{-1/2} a^{1/2} \quad (22)$$

$$u' \sim \frac{\alpha}{L} Ra_L a^{-1} \quad (23)$$

$$v' \sim \frac{\alpha}{L} Ra_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (24)$$

où le nombre de Darcy-Rayleigh Ra_L basé sur la longueur L du puits cylindrique s'écrit :

$$Ra_L = \frac{K_1 g \beta L (T_1 - T_2)}{\alpha \nu} \quad (25)$$

Tenant compte des équivalences (22)-(24), la résolution de l'équation (19) permet de réécrire les hypothèses de validité du régime de couche limite traduites par les conditions (16)-(18). Elles deviennent :

$$b \ll Ra_L \quad (26)$$

$$c \ll a^{1/2} Ra_L^{1/2} \quad (27)$$

Tenant compte des équations (13), (14), (23), (24), en utilisant l'expression de la diffusivité thermique du milieu poreux $\alpha (= k / (\rho c_p)_f)$ nous obtenons pour le nombre de Nusselt l'ordre de grandeur suivant :

$$Nu \sim a^{-1} Ra_L \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (28)$$

RESOLUTION

Dans cette section, deux méthodes de résolution sont développées. La première, celle des relations intégrales est basée sur le modèle d'étude développé par Lighthill [17] pour étudier la convection dans les tubes verticaux confinant un milieu fluide. La seconde méthode est basée sur la technique de linéarisation d'Oseen qui est connue pour sa précision en ce qui concerne l'étude du phénomène de convection libre en milieu confiné.

1. Méthode des relations intégrales

Il convient de normaliser les équations gouvernantes en introduisant les transformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} x &= x'/L & r &= r'/R \\ u &= u'R^2/(\alpha L) & v &= v'R/\alpha \\ T &= \frac{K_1 g \beta L (T' - T_1)}{\alpha v} \left(\frac{R}{L}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

En introduisant les variables adimensionnelles (29) dans les équations (5), (8) et (18), les équations gouvernantes adimensionnelles s'écrivent respectivement:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (30)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} \quad (31)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (32)$$

Les conditions aux limites (12.a) et (12.b) formulées en variables adimensionnelles s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \{ r = 1: & \quad v = 0, \quad T = 0 & (a) \\ \{ x = 0: & \quad u = 0, \quad T = 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Comme il a été discuté par Bejan [4], le puits cylindrique et le réservoir dans lequel il débouche ont la même température au point de l'axe médian du cylindre où ils sont en contact. Ainsi :

$$x = 1: \quad r = 0, \quad T = -Ra_L \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (34)$$

A cause de la grande extension du puits cylindrique, le rapport de forme (R/L) est très faible, soit $(R/L) \ll 1$. Par conséquent les termes dont ce rapport constitue un facteur dans les équations (30)-(32) seront négligés. Sur cette base, compte tenu des équations du système (29), la validité de la présente analyse requiert que les conditions suivantes :

$$\frac{a}{c} \gg \frac{R}{L} \quad (35)$$

$$\frac{a}{b} \gg \left(\frac{R}{L}\right)^2 \quad (36)$$

soient satisfaites.

Désignons respectivement par $\zeta(x)$ et $[1 - \zeta(x)]$, le rayon de courbure de la couche poreuse isotherme située dans la région centrale et centrée sur l'axe du puits cylindrique et l'épaisseur de la couche limite dynamique située dans la région annulaire du cylindre. S'inspirant des développements faits par Lighthill [17], les profils appropriés pour la température T et la composante verticale u de la vitesse de filtration du fluide dans le milieu poreux sont les suivants :

$$0 < r < \zeta \quad \left\{ \begin{aligned} T &= T_c & (a) \\ u &= u_c & (b) \end{aligned} \right. \quad (37)$$

$$\zeta < r < 1 \quad \left\{ \begin{aligned} T &= T_c \left[1 - \left(\frac{r-\zeta}{1-\zeta}\right)^2 \right] & (a) \\ u &= u_c - \frac{T_c}{a} \left[1 - \left(\frac{r-\zeta}{1-\zeta}\right)^2 \right] & (b) \end{aligned} \right. \quad (38)$$

où T_c et u_c représentent la température et la composante verticale de la vitesse dans la région centrale de la cavité cylindrique.

A partir de l'équation (30), l'équation de conservation de la masse

$$\int_0^1 r u dr = 0 \quad (39)$$

permet d'établir compte tenu des équations (37) et (38) l'expression donnant u_c :

$$u_c = \frac{T_c}{6a} (3 - 2\zeta - \zeta^2) \quad (40)$$

L'équation d'énergie (32) écrite sous forme intégrale et évaluée de la position de l'axe central ($r = 0$) de la cavité à la surface latérale ($r = R$) s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^1 ruTdr \right) = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} \quad (41)$$

Tenant compte des équations (37a) et (38b) et de l'expression de la température dans la région centrale $T_C (= -Ra_L(R/L)^2)$ l'équation d'énergie (41) permet d'obtenir la relation suivante:

$$\frac{x}{Ra_L(R/L)^2} = \frac{1}{1080a} (1 + 18\zeta - 12\zeta^2 - 28\zeta^3 + 15\zeta^4 + 6\zeta^5) \quad (40)$$

L'équation (40) donne l'épaisseur maximale que peut avoir la couche limite dynamique qui se développe dans la région annulaire de la cavité cylindrique. En effet, en dérivant par rapport à ζ le second membre de l'équation (40) et en l'annulant, on obtient $\zeta = 0,392$ qui donne l'épaisseur maximale qui est définie comme suit :

$$\frac{x}{Ra_L(R/L)^2} \Big|_{\zeta=0,392} = \frac{0,00457}{a} = \frac{1}{218,83a} \quad (41)$$

Sur la section supérieure droite de l'enceinte cylindrique au point où elle est en contact avec le réservoir ($x = 1$), l'épaisseur de la couche limite s'écrit $[1 - \zeta(1)]$. Puisque la couche limite se développe dans la région annulaire de la cavité cylindrique dont la limite est telle que $x \leq 1$, cette condition nous permet de relier son épaisseur au nombre de Rayleigh Ra_L . Ainsi, nous obtenons sur la base de l'équation (41) la condition d'existence de la couche limite qui est la suivante :

$$Ra_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \geq 218,83a \quad (42)$$

A partir de l'équation (15), compte tenu des équations (29), le nombre de Nusselt donné par l'équation (13) s'écrit :

$$Nu = 5,62 \left(\frac{R}{L} \right) Ra_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (43)$$

Le nombre de Nusselt (équation (43)) est en accord avec celui prédit par l'analyse d'échelle (équation (28)). Dans le cas particulier d'un milieu poreux isotrope en perméabilité ($a = 1$), le présent résultat est confirmé par celui obtenu par Bejan [4].

Méthode d'Oseen

Dans cette méthode, le champ d'écoulement est défini dans la région annulaire avoisinant la surface latérale du cylindre. Pour son étude, il est considéré un système de coordonnées cartésiennes (\bar{x}, \bar{y}) dans lequel \bar{x} mesure la distance le long de la surface latérale du cylindre vertical et \bar{y} celle mesurée sur l'axe horizontal à partir du bord d'attaque du cylindre ($\bar{y} = R - \bar{r}$). Il est évident que dans la région annulaire située près de la surface latérale considérée comme étant une couche limite d'épaisseur δ le long de cette paroi, nous devons avoir la condition ($\bar{y} \ll R$). Dans ces conditions, les équations gouvernantes du phénomène de convection (1), (2) et (3), s'écrivent:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{v}}{(R-\bar{y})} = 0 \quad (44)$$

$$a \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + c \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) - b \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = \frac{K_1 g \beta}{v} \left(\frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} \right) \quad (45)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T'}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} = \alpha \left[\frac{1}{(R-\bar{y})} \frac{\partial T'}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 T'}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial \bar{x}^2} \right] \quad (46)$$

Reconnaissant L et δ comme étant les échelles caractéristiques respectives des variables \bar{x} et \bar{y} dans la région annulaire considérée ($\delta \ll L$), en recherchant pour \bar{u} , \bar{v} et δ les termes d'ordre de grandeur relativement aux équations (44), (45) et (46), on obtient les résultats suivants:

$$\delta \sim L Ra_L^{-1/2} a^{1/2} \quad (47)$$

$$\bar{u} \sim \frac{\alpha L}{\delta^2} \quad (48)$$

$$\bar{v} \sim \frac{\alpha}{\delta} \quad (49)$$

A partir des équations (47), (48) et (49), nous pouvons introduire, les variables adimensionnelles correspondantes suivantes:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{\bar{x}}{L} & \tilde{y} = \frac{\bar{y}}{\delta} \\ \tilde{u} = \frac{\bar{u}\delta^2}{\alpha L} & \tilde{v} = \frac{\bar{v}\delta}{\alpha} \\ \tilde{T} = \frac{T' - T_1}{\Delta T} & \Delta T = T_1 - T_2 \end{cases} \quad (50)$$

Sur cette base, nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (51)$$

$$a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + c \left(\frac{\delta}{L} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) - b \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \quad (52)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \left(\frac{\delta}{L} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} + \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (53)$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent:

$$\begin{cases} \tilde{y} = 0: & \tilde{v} = 0, & \tilde{T} = 0 & \text{(a, b)} \\ \tilde{y} \rightarrow \infty: & \tilde{u} = \tilde{u}_\infty(\tilde{x}), & \tilde{T} = -1 & \text{(c, d)} \end{cases} \quad (54)$$

Sur la base des approximations de couche limite, $(\delta/L) \ll 1$, les équations précédentes se réduisent pour donner respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (55)$$

$$a \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \quad (56)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (57)$$

De l'intégration de l'équation de mouvement par rapport à \tilde{y} , nous obtenons la relation :

$$a\tilde{u} = \tilde{T} \quad (58)$$

En rapportant la dérivée partielle de l'équation de mouvement par rapport à \tilde{y} dans le deuxième membre de l'équation d'énergie nous obtenons la nouvelle équation qui suit:

$$a \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - a\tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} - \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (59)$$

La méthode d'Oseen consiste à considérer \tilde{v} et $\partial \tilde{T} / \partial \tilde{x}$ comme des fonctions de la variable physique \tilde{x} . Ainsi suivant les conditions aux limites

(54), l'équation (59) peut être intégrée relativement à \tilde{y} . Ceci conduit aux expressions suivantes :

$$\tilde{u} = \frac{1}{a} \exp[\tilde{y}\tilde{x}(\tilde{x})] + \tilde{u}_\infty(\tilde{x}) \quad (60)$$

$$\tilde{T} = \exp[\tilde{y}\tilde{x}(\tilde{x})] - 1 \quad (61)$$

En portant les expressions de $\tilde{u}(\tilde{x})$ et celle de $\tilde{T}(\tilde{x})$ dans les équations de conservation de la masse et de l'énergie sous leur formulation intégrale :

$$\int_0^Y \tilde{u} d\tilde{y} = 0 \quad (62)$$

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \left(\int_0^Y \tilde{u} \tilde{T} d\tilde{y} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} \right) \Big|_{\tilde{y}=0} \quad (63)$$

nous obtenons les relations suivantes :

$$\tilde{v} Y \tilde{u}_\infty = \frac{1}{a} \quad (64)$$

$$\frac{1}{4\tilde{v}^2} + \frac{2}{3Y\tilde{v}^3} = a\tilde{x} \quad (65)$$

Dans ces relations, Y représente la valeur de la variable physique \tilde{y} au centre du cylindre $Y (= R/(2\delta))$. En recherchant le maximum \tilde{x}_0 de la variable physique \tilde{x} à partir de l'équation (65), nous obtenons:

$$\left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{4\tilde{v}^2} + \frac{2}{3Y\tilde{v}^3} \right) \right] \Big|_{\tilde{v}=-4/Y} = \tilde{x}_0 = \frac{Y^2}{192a} \quad (66)$$

A partir de l'expression donnant l'épaisseur de la couche limite $\delta (= LRa_L^{-1/2})$ et compte tenu de la valeur de $\tilde{y}|_{r=R} = (Y = R/(2\delta))$, \tilde{x}_0 se réécrit :

$$\tilde{x}_0 = \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{Ra_L}{768a} \quad (67)$$

La hauteur du cylindre étant normalisée à l'unité ($x \geq 1$), le maximum \tilde{x}_0 trouvé est défini tel que $1 \leq \tilde{x}_0$. Nous en déduisons la condition d'existence du régime de couche limite qui s'écrit :

$$Ra_L \left(\frac{R}{L} \right)^2 \geq 768a \quad (68)$$

La substitution des équations (29), (60) et (61) dans l'équation (15) et l'utilisation de la condition (64) nous permet de calculer le taux de transfert de chaleur défini à l'équation (13). Ceci conduit au résultat qui s'écrit comme suit:

$$Nu = 2\pi \left(\frac{R}{L} \right) Ra_L^{1/2} a^{-1/2} \quad (70)$$

RESULTATS ET DISCUSSION

Pour des nombres de Rayleigh suffisamment élevés, le phénomène de convection libre à l’intérieur du puits et celui siégeant au voisinage d’une surface verticale présente approximativement les mêmes caractéristiques. Dans le cas d’un milieu poreux isotrope ($a=1$), un excellent accord entre les nombres de Nusselt (équations (43) et (70)) et ceux obtenus par *Cheng et Minkowycz* [2] en convection naturelle le long d’une plaque verticale a été obtenu par *Bejan* [4]. La comparaison des nombres de Nusselt obtenus par les deux méthodes développées dans cette étude est présentée dans la table 1.

A partir de la table 1, nous observons que dans le cas particulier d’un milieu poreux isotrope, la solution obtenue par la méthode intégrale est meilleure lorsque nous la comparons à celle que donne la méthode de linéarisation d’Oseen. Cette conclusion découle du fait que le nombre de Nusselt obtenu dans ce cas diffère seulement de 7% de celui obtenu par *Cheng et Minkowycz* [2] ($Nu/100 = 1,674$).

Table 1: Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt obtenues suivant les deux méthodes de résolution lorsque $\theta = 45^\circ$.

K^*	a $\theta = 45^\circ$	$Ra_L^{1/2}(R/L)$	$Nu/100$	
			Solution intégrale (43)	Solution d’Oseen (70)
0.2 (<1.0)	0.6	25.0	1.81	2.02
1.0 (isotrope)	1.0	30.0	1.69	1.88
10.>1.0)	5.5	65.0	1.55	1.74

La figure 2 illustre la variation du taux de transfert de chaleur Nu en fonction du paramètre $Ra_L^{1/2}(R/L)$ pour $\theta = 45^\circ$ et pour différentes valeurs du rapport d’anisotropie K^* . Sur cette figure, la condition d’existence du régime de couche limite $Ra_L^{1/2}(R/L) \geq 14,793a^{1/2}$, obtenue par la méthode des relations intégrales est représentée par les droites en traits pleins obtenues pour les différentes valeurs du rapport K^* . Par exemple lorsque $K^* = 0,2$; $K^* = 1$ et $K^* = 10$ nous obtenons respectivement

les conditions $Ra_L^{1/2}(R/L) \geq 11,486$; $Ra_L^{1/2}(R/L) \geq 14,793$ et $Ra_L^{1/2}(R/L) \geq 34,692$.

En général, lorsque le paramètre $Ra_L^{1/2}(R/L)$ croît, le transfert de chaleur par convection croît à partir de la valeur limite $14,793a^{1/2}$ qui dépend des paramètres d’anisotropie K^* et θ dont est fonction la constante a .

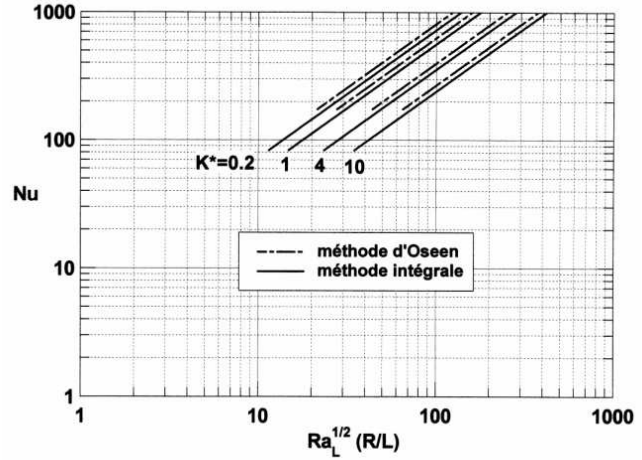


Figure 2. Effet du nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra_L sur le nusselt Nu pour différentes valeurs du rapport d’anisotropie K^* .

En outre, lorsqu’on augmente la valeur du rapport d’anisotropie K^* de 0,2 à 10 nous observons sur la figure 2 une croissance de la valeur du paramètre $Ra_L^{1/2}(R/L)$ qui passe de 11,456 à 34,692 traduisant le fait que l’écoulement du fluide à travers la matrice poreuse confinée dans le puits devient de plus en plus développé. Ce comportement peut être expliqué par le fait que, pour des valeurs données de θ et de Ra_L (c’est-à-dire de K_1), une augmentation du rapport d’anisotropie en perméabilité K^* peut être interprétée comme une augmentation de la valeur du nombre de Rayleigh Ra_L par l’intermédiaire du paramètre $a (= \cos^2\theta + K^*\sin^2\theta)$. Par conséquent, il résulte une croissance du taux de transfert de chaleur (équation (43)). La même observation est faite à partir de la solution obtenue par la méthode de linéarisation d’Oseen. Cette dernière est illustrée sur la figure 2 par les droites représentées en pointillés dans le cas où les valeurs prises par le paramètre $Ra_L^{1/2}(R/L)$ sont définies telles que $Ra_L^{1/2}(R/L) \geq 27,713a^{1/2}$. Nous observons également dans ce cas que, lorsque K^* varie de 0,2 à 10, la valeur du paramètre $Ra_L^{1/2}(R/L)$ croît de 21,466 à 64,992. Ceci met en évidence, une nette croissance du transfert thermique. L’influence de l’angle d’orientation θ des axes principaux de perméabilité sur le nombre de Nusselt Nu est illustrée sur la figure 3 pour $Ra_L = 100$, ($R/L =$

0,2) et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie K^* .

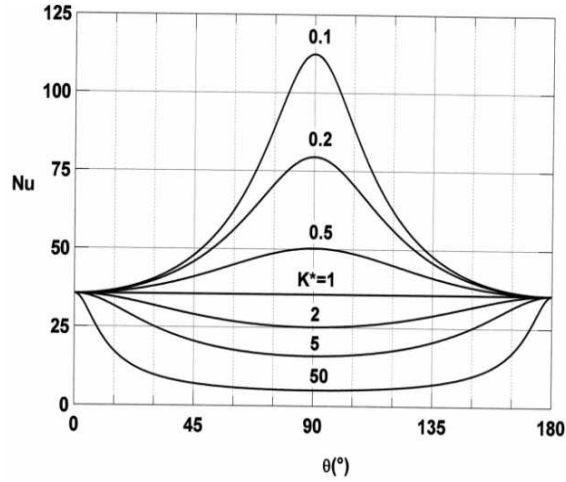


Figure 3. Effet de l'angle d'orientation θ des axes principaux sur le nombre de nusselt (solution intégrale) pour différentes valeurs de K^* .

Dans le cas d'un milieu poreux isotrope ($K^* = 1$), le nombre de Nusselt Nu est indépendant de θ comme nous pouvons le prévoir. En général, une symétrie des résultats est observée lorsque l'angle d'orientation θ atteint la valeur $\theta = 90^\circ$. Pour cette raison, nous limiterons la discussion au domaine de valeurs d'angle θ telles que $0^\circ < \theta < 90^\circ$. La figure 3 indique que pour des rapports d'anisotropie de valeurs inférieures à l'unité ($K^* < 1$), le Nusselt est minimal lorsque $\theta = 0^\circ$; angle d'orientation pour laquelle la perméabilité dans la direction verticale est maximale. La situation inverse est observée lorsque $K^* > 1$. Dans ce cas, le transfert de chaleur est maximal lorsque $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 90^\circ$. Nous pouvons démontrer ce comportement à partir de la solution (équation (43)) obtenue en régime de couche limite. En annulant la dérivée par rapport à θ du nombre de Nusselt obtenu à l'équation (43), nous obtenons comme équation $(K^* - 1)\sin 2\theta = 0$ les solutions de cette équation rendent le nombre de Nusselt Nu maximal lorsque $\theta = 90^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 0^\circ$. De la dérivée seconde par rapport à θ , nous obtenons

$$d^2Nu/d\theta^2 = \pm 11,24(R/L)Ra_L^{1/2}(K^* - 1)$$

respectivement lorsque $\theta = 0^\circ$ et lorsque $\theta = 90^\circ$.

Ainsi, dans le cas des rapports d'anisotropie de valeurs supérieures à l'unité ($K^* > 1$), le Nusselt est maximal lorsque $\theta = 0^\circ$ et minimal lorsque $\theta = 90^\circ$. La situation inverse est observée lorsque $K^* < 1$. Il résulte de ces observations que, le

transfert de chaleur est maximal (minimal) lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Ces résultats sont qualitativement similaires à ceux obtenus numériquement par Zhang [13], Degan et coll. [14], Degan et Vasseur [15,16] qui ont étudié l'influence de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur le transfert de chaleur dans une cavité verticale chauffée par les côtés.

Sur la figure 4, la variation du nombre de Nusselt (équation (43)) est représentée en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh Ra_L pour différentes valeurs de l'angle d'orientation θ et pour deux valeurs du rapport d'anisotropie, respectivement $K^* = 0,1$ et $K^* = 10$. Lorsque $\theta = 0^\circ$, la valeur de la constante a est égale à l'unité et nous obtenons $Nu(R/L) = 5,62Ra_L^{1/2}$. Par conséquent le transfert de chaleur par convection est indépendant du rapport d'anisotropie K^* . Comme il a été discuté précédemment, dans le cas où le rapport d'anisotropie en perméabilité est inférieur à l'unité ($K^* < 1$), nous observons sur la figure 4, une croissance du transfert de chaleur lorsque l'angle d'orientation θ croît de 0° à 90° . Dans les mêmes conditions, la situation inverse est observée lorsque $K^* > 1$.

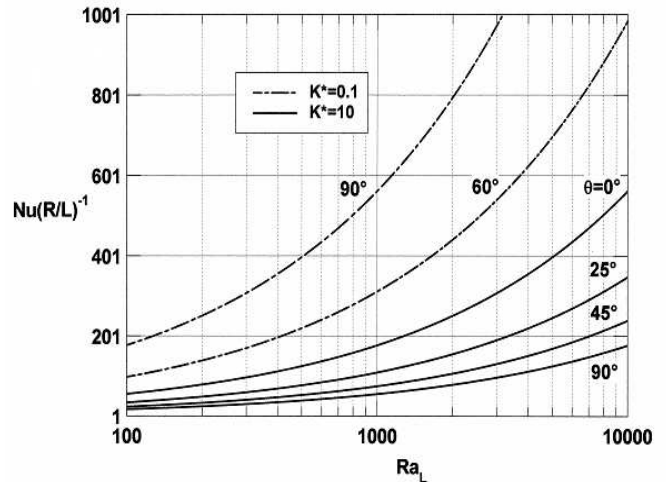


Figure 4. Effet du nombre de Darcy-Rayleigh modifié Ra_L sur le nusselt (solution intégrale) pour différents θ lorsque $K^*=0,1$ et $K^*=10$.

La figure 5 illustre les effets du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L et du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sur le taux de transfert de chaleur pour $\theta = 45^\circ$. Comme l'ont discuté Aboubi et coll. [18], Degan et Vasseur [15], le nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L normalisé tel que $R_L = Ra_L/\sqrt{K^*} = g\beta L(T_1 - T_2)\sqrt{K_1K_2}/(\alpha\nu)$ est plus

approprié pour décrire le présent phénomène, puisque les perméabilités extrêmes K_1 et K_2 font partie des effets normalement associés à tout changement de nombre de Rayleigh R_L . La figure 5 montre la variation du nombre de Nusselt en fonction du rapport d'anisotropie K^* et du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L . Pour les raisons évoquées au début de ce paragraphe, les courbes obtenues sont symétriques par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$. Nous pouvons aussi à partir des équations gouvernantes, déduire aisément que pour un nombre de Rayleigh R_L donné, la solution obtenue pour $\theta = 45^\circ$ et pour une valeur donnée de K^* , correspond à celle obtenue pour $\theta = -45^\circ$ et $1/K^*$.

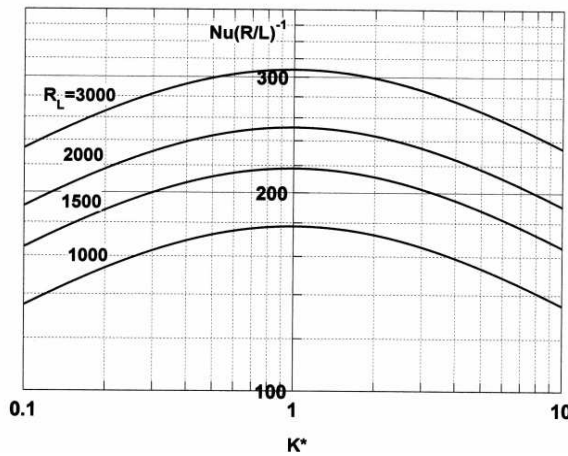


Figure 5. Effet du rapport d'anisotropie K^* et du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L sur le nusselt pour un angle d'orientation $\theta = 45^\circ$, des axes principaux.

La figure 6 montre les variations du nombre de Nusselt Nu moyen en fonction des paramètres d'anisotropie K^* et θ . A partir de l'équation (43) et tenant compte du fait que $R_L = Ra_L/\sqrt{K^*}$, il a été observé que le paramètre $Nu(R/L)^{-1}/R_L^{1/2}$ dépend uniquement du facteur $((K^*)^{1/2}/a)^{1/2}$, où la constante a dépend des paramètres anisotropes du milieu poreux K^* et θ , par la relation $a = \cos^2\theta + K^*\sin^2\theta$. En outre, pour une valeur donnée du nombre de Darcy-Rayleigh modifié R_L , nous pouvons déduire que si $u(r, x)$, $v(r, x)$ et $T(r, x)$ sont solutions pour $(R_L, R/L, \theta, K^*)$, alors elles sont également solutions pour $(R_L, R/L, \pi/2 - \theta, 1/K^*)$.

Ce point est illustré sur la figure 6, où la symétrie obtenue par rapport à la ligne verticale à $K^* = 1$ est

aussi une conséquence de l'échelle logarithmique qui a été utilisée pour le rapport d'anisotropie K^* . Dans le cas particulier où $\theta = 45^\circ$, $\theta = \pi/2 - \theta$; les courbes correspondantes sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$, de sorte que les résultats obtenus pour une valeur donnée de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$. Cependant, lorsque θ a une valeur différente de 45° , la symétrie observée pour un ensemble donné de propriétés anisotropes θ et K^* est réalisée pour $\pi/2 - \theta$ et $1/K^*$.

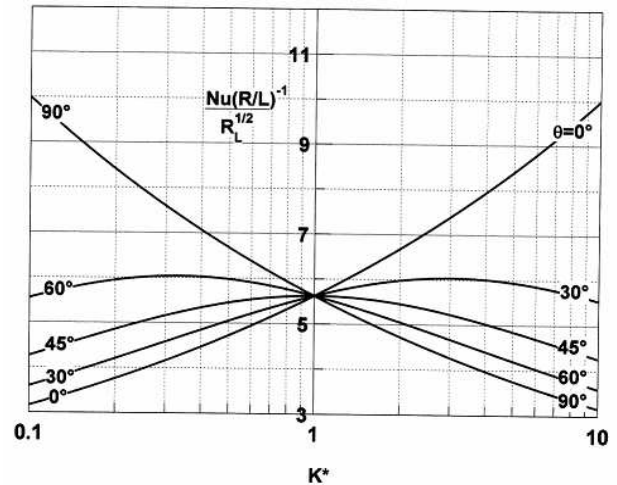


Figure 6. Effets du rapport d'anisotropie K^* et de l'angle d'orientation des axes principaux sur le nusselt Nu .

CONCLUSION

Dans cette étude, il est investigué les effets des paramètres d'anisotropie en perméabilité sur la convection pénétrante à l'intérieur d'un puits cylindrique vertical confinant un milieu poreux saturé par un fluide incompressible. Le puits débouche à sa section supérieure dans un réservoir dont la température est relativement plus basse. Pour l'étude de la couche limite qui se développe le long de la paroi latérale du cylindre, deux méthodes d'investigation basées sur le modèle de Darcy ont été développées. La première méthode, celle des relations intégrales est basée sur le modèle d'étude développé par Lighthill [17] pour la convection dans les tubes verticaux confinant un milieu fluide.

La seconde méthode est basée sur la technique de linéarisation d'Oseen qui est très indiquée pour sa précision en ce qui concerne l'étude du phénomène de convection libre en milieu confiné.

De l'analyse précédente, il se dégage ce qui suit :

1) La condition d'existence du régime de couche limite, bien que liée à la méthode de résolution, reste dépendante des paramètres d'anisotropie en perméabilité du milieu poreux.

2) Le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'orientation θ des axes principaux ont une grande influence sur le taux de transfert de chaleur. En particulier, il a été démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et minimal

lorsque cette orientation est perpendiculaire à ce dernier.

3) Pour une orientation θ fixée, la solution pour un ensemble donné de paramètres de contrôle R_L , R/L et K^* est équivalente à celle correspondant aux paramètres R_L , R/L , $\pi/2 - \theta$ et $1/K^*$. Finalement, pour le cas particulier $\theta = 45^\circ$, les solutions pour des valeurs fixées de R_L et R/L sont parfaitement symétriques par rapport à $K^* = 1$, de sorte que les résultats pour une valeur de K^* sont équivalents à ceux obtenus pour $1/K^*$.

REFERENCES

1. CHENG P., 1978.- "Heat transfer in geothermal systems" *Adv. Heat Transfer*, Vol. 15, pp.1-105
2. MINKOWYCZ W. J., CHENG P. 1976.- "Free convection about a vertical cylinder embedded in a porous medium" *Int J Heat Mass Transfer*, Vol. 19, pp. 805-813
3. VASANTHA R., NATH G., 1987.-" Forced convection along a longitudinal cylinder embedded in saturated porous medium." *J. Heat Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 639-646.
4. BEJAN A., 1980.-"Natural convection in a vertical cylindrical well filled with porous medium." *J. Heat Mass Transfer.*, Vol. 23, pp. 726-729 .
5. BEJAN A., 1984.-"Convection heat transfer." A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons.
6. BEAR J., 1972.-"Dynamics of fluids in porous media." Dover Publications New York.
7. NEALE G., 1977.-"Degrees of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous Medium.", *J. AIChE* 23, pp. 56-62.
8. CASTINEL G., COMBARNOUS M., 1974.- "Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope.", *J. C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris*, Vol. B278, pp. 701-704.
9. EPHERRE J. F., 1975.-"Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope.", *J. Rev. Gen. Therm*, Vol. 168, 949-950.
10. KVERNOLD O., TYVAND P. A., 1979.- "Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media." *J. Fluid Mech.*, Vol. 90, pp. 609-624.
11. McKIBBIN R., 1984.- "Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions. " *J. Trans. Porous Media* Vol. 1, pp. 271-292.
12. TYVAND P. A., STORESLETTEN L., 1991.- "Onset of convection in an anisotropic porous medium with oblique principal axes" *J. Heat Transfer Jpn Res*, Vol. 22, pp. 609-624.
13. ZHANG X., 1993.- "Convective heat transfer in a vertical porous layer with anisotropic permeability." *Proc.14th Canadian Congr. Appl. Mech* Vol. 2, pp. 579-580.
14. DEGAN G., VASSEUR P., BILGEN E., 1995.- "Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer." *J. Heat Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 1975-1987.
15. DEGAN G., Vasseur P., 1996.- "Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes." *Numerical Heat Transfer*, Vol. A30, pp. 397-412.
16. DEGAN G., Vasseur P., 1997.- "Boundary-Layer regime in a vertical porous layer with anisotropic permeability and boundary effects.", *J. Heat and fluid flow*, Vol. 18, pp. 3334-343.

17. LIGHTHILL M., 1953.- "Theoretical considerations of free convection in tubes.", *Q J. Mech Appl Math* Vol. 6, pp. 398-439.

18. ABOUBI K., ROBILLARD L., BILGEN E., 1995.- "Natural convection in horizontal annulus filled with an anisotropic porous medium." *ASME / JSME Thermal Eng. Conf.* Vol. 3, pp. 415-422.