



Introduction à la Programmation Linéaire (avec le Solveur de Microsoft® Excel™)

Enoncé du problème

La firme MAGIX monte sous licence deux types d'ordinateurs compatibles IBM : le PT133 et le DX4100. Les ordinateurs sont montés dans la section Montage puis sévèrement testés dans la section Test. Il faut 4 heures pour monter le PT133 et 3 heures pour le DX4100. Le test du PT133 prend 2 heures tandis que celui du DX4100 n'en prend qu'une. La section Montage ne peut travailler plus de 3 600 heures par an tandis que la section Test ne peut dépasser 1 400 heures d'activité. La firme MAGIX ne peut écouler plus de 500 PT133 ni plus de 1000 DX4100 par an. Elle réalise un bénéfice de 4 500 sur le PT133 et de 3 000 sur le DX4100.

Travail à faire : Quelles sont les quantités de PT133 et de DX4100 que doit produire la firme MAGIX par an, pour maximiser son profit ? Quelle est la valeur de ce profit ?

ELYTH® MICROFINANCE™ : Progiciel - Manuel d'Informatique - Manuels de Microfinance - Certifications



NOUVEAU REFERENTIEL DES SFD - GESTION DE PORTEFEUILLE - COMPTABILITE GENERALE & BUDGETAIRE - REPORTING BCEAO

COURS D'INFORMATIQUE APPLIQUEE A LA MICROFINANCE - MANUEL DE MICROFINANCE A L'USAGE SFD - LICENCE - MASTER

Formalisation du problème

Le problème de la firme MAGIX est un problème de recherche de la combinaison des produits (*product-mix*) à fabriquer avec des ressources limitées à usage alternatif par une entreprise multi-produit pour maximiser son profit total.

Définition des variables

X : la quantité de PT133 à produire avec un profit unitaire de : $a=4\ 500$,
Y : la quantité de DX4100 à produire avec un profit unitaire de : $b=3\ 000$,
Z : le profit total : $Z = aX + bY$, soit $Z = 4500X + 3000Y$.

Objectif

L'objectif de la firme MAGIX est de déterminer les quantités X et Y qui maximisent son profit total Z.

Contraintes

Contraintes techniques

(1) Contrainte de la section Montage en heures : $4X + 3Y \leq 3\ 600$
(2) Contrainte de la section Test en heures : $2X + Y \leq 1\ 400$

Contraintes commerciales

(3) Contrainte de commercialisation du PT133 : $X \leq 500$

(4) Contrainte de commercialisation du DX4100 : $Y \leq 1\,000$

Contraintes de signe ou contraintes logiques

$X \geq 0$ et $Y \geq 0$ car on ne peut pas produire des quantités négatives ici.

Résumé du programme

Le programme à résoudre suit.

$$\text{Max } Z = 4500X + 3000Y$$

Sous les contraintes :

$$(1) \quad 4X + 3Y \leq 3\,600$$

$$(2) \quad 2X + Y \leq 1\,400$$

$$(3) \quad X \leq 500$$

$$(4) \quad Y \leq 1\,000$$

avec les contraintes de signe $X \geq 0$ et $Y \geq 0$.

A propos de la dénomination « programmation linéaire »

Ce modèle est « linéaire » parce que la fonction « objectif » est linéaire ainsi que les contraintes. La représentation dans le plan (xOy) de l'objectif ainsi que de chaque contrainte, donne une ligne droite et non une ligne courbée. Il s'agit d'un problème basique d'Algèbre linéaire comme le suggère la présentation matricielle ci-après. Mais quid du mot « programmation » ? Il a été proposé vers 1947 par le savant George Dantzig qui a implémenté l'algorithme de simplexe permettant de résoudre ce genre de problème, dans les ordinateurs par ... programmation. Vu que le mot programmation est de plus en plus associé à l'informatique, les spécialistes parlent maintenant d'« optimisation linéaire », pour signifier la recherche d'un optimum (maximum ou minimum selon le cas) d'un problème linéaire. La programmation informatique n'est qu'une modalité de résolution de ces problèmes linéaires d'optimisation.

Présentation matricielle

Cette section est destinée aux Etudiants d'Elyth®. Elle peut être ignorée sans nuire à la compréhension du reste de l'article, même si la mise en forme du programme dans le tableur, s'inspire largement de cette présentation !

Introduction des vecteurs et matrices

Soient :

P : le vecteur colonne des produits, de type 2 lignes, 1 colonne, soit (2,1).

C : le vecteur des profits unitaires, de type 1 ligne, 2 colonnes, soit (1,2).

Z : la valeur du profit total, un scalaire, 1 ligne, 1 colonne, soit (1,1).

Vérification de la faisabilité du produit matriciel CP -> Z : (1,2)(2,1) -> (1,1). OK.

A : la matrice des coefficients des quatre contraintes, de type 4 lignes, 2 colonnes, soit (4,2).

B : le vecteur colonne des valeurs limites de type 4 lignes, 1 colonne, soit (4,1).

$$C = (4500 \quad 3000) \quad P = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3600 \\ 1400 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Vérification de la faisabilité du Produit matriciel AP -> B : (4,2) (2,1) -> (4,1). OK.

Ecriture matricielle du programme

$$\text{Max } Z = CP$$

sous

$$AP \leq B$$

ou encore

$$\text{Max } (4500 \quad 3000) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\text{sous } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3600 \\ 1400 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$



Résolution avec le Solveur de Microsoft® Excel™

Ce programme peut être résolu :

- graphiquement car il n'y a que deux variables,
- par l'algorithme de simplexe avec les tableaux,
- avec des programmes informatiques comme Microsoft® Excel™, choisi pour cet article.

Mise en forme du programme dans le tableau

La cellule E2 est destinée à contenir la valeur optimale.

Les cellules B4 et C4 sont destinées à contenir respectivement les variables X et Y.

Les cellules E5,E6,E7,E8 sont destinées aux valeurs des contraintes.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Cas MAGIX	Coefficients de l'objectif			Valeur objectif		© ELYTH®
2	Objectif	4500	3000		=B2*B4+C2*C4		INSTITUTE™
3	Variables	X	Y				
4	Valeurs optimales				Contraintes	Sens	B-Limites
5	Contrainte 1	4	3		=B5*B\$4+C5*C\$4	<=	3600
6	Contrainte 2	2	1		=B6*B\$4+C6*C\$4	<=	1400
7	Contrainte 3	1	0		=B7*B\$4+C7*C\$4	<=	500
8	Contrainte 4	0	1		=B8*B\$4+C8*C\$4	<=	1000

Formulation de l'objectif et du membre gauche de la contrainte

Contenu de la cellule objectif : E2=B2*B4+C2*C4

Calcul des valeurs des contraintes

$$\text{Contrainte 1 : } E5=B5*B\$4+C5*C\$4$$

$$\text{Contrainte 2 : } E6=B6*B\$4+C6*C\$4$$

$$\text{Contrainte 3 : } E7=B7*B\$4+C7*C\$4$$

$$\text{Contrainte 4 : } E8=B8*B\$4+C8*C\$4$$

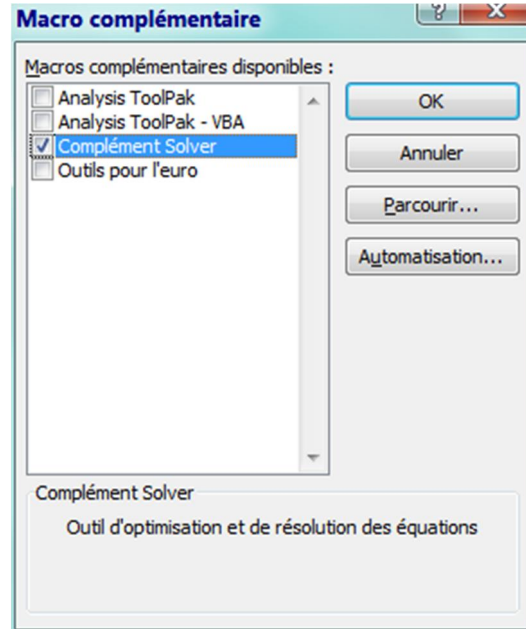
La ligne 4 est bloquée dans B\$4 et C\$4 par le symbole \$ en vue de la recopie vers le bas.

Ces valeurs calculées doivent être inférieures ou égales aux valeurs exprimant les disponibilités maximales :

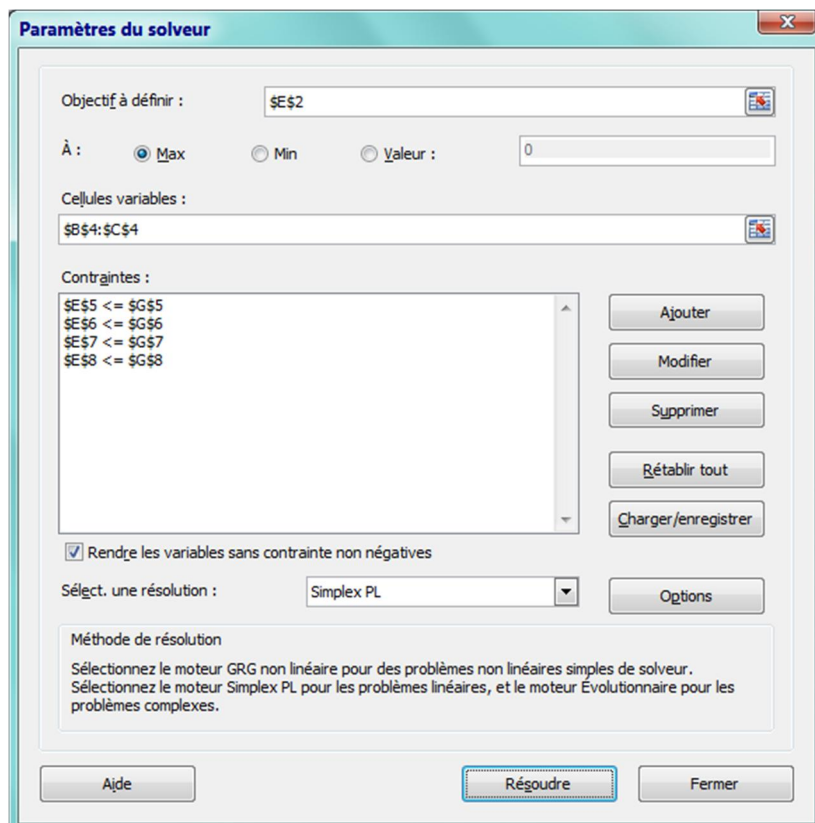
E5 <= G5
E6 <= G6
E7 <= G7
E8 <= G8

Résolution du programme avec le Solveur d'Excel

Une fois le problème posé sous forme de tableau, il faut appeler le Solveur par le Menu selon la version d'Excel. Le Solver est une macro complémentaire Solver.xla ou Solver.xlam qui n'est pas installée par défaut. Il faut chercher dans l'aide d'Excel, comment l'installer.



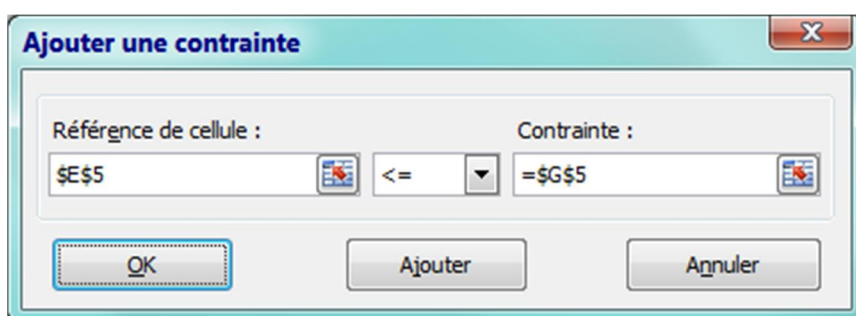
Si l'installation réussit, le Solver est alors disponible dans le menu [Données] ou dans le Menu [Outils], Sous-menu [Options] dans les très anciennes versions.



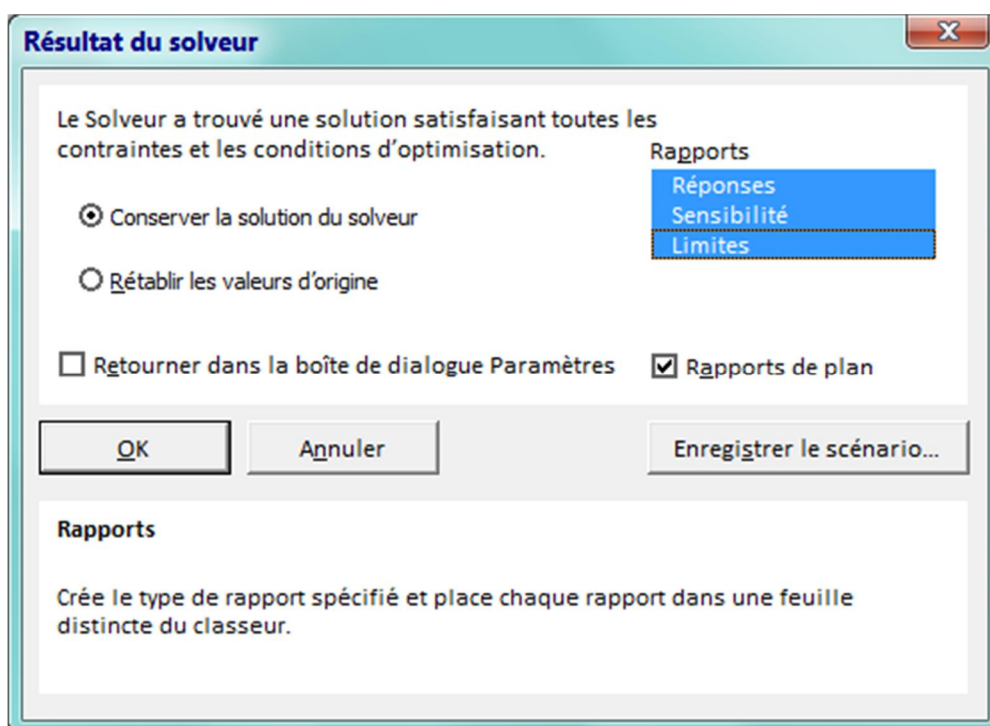
Remarques

1. Les contraintes de signe sont prises en compte en cochant la case « Rendre les variables sans contrainte non négatives ».
2. Comme, le problème à résoudre relève de la programmation linéaire, la méthode de résolution à sélectionner est : Simplex PL (Programmation Linéaire).
3. Ecriture des contraintes dans le Solveur

La colonne F contenant les sens de l'inégalité est figurative pour la lisibilité du tableau. La boîte de dialogue [Ajouter une contrainte] permet de choisir le sens. Il faut ajouter successivement les quatre contraintes. Les cellules E5,E6,E7,E8 sont respectivement comparées avec les valeurs limites contenues dans G5,G6,G7,G8.



Après avoir transposé le problème dans le Solver, il faut activer le bouton de commande [Résoudre] dans la boîte de dialogue [Paramètres du Solveur]. La boîte de dialogue [Résultat du solveur] apparaît. Il faut activer les trois Rapports proposés.



La solution apparaît dans le tableau.

Solution

	A	B	C	D	E	F	G
1	Cas MAGIX	Coefficients de l'objectif			Valeur objectif		© ELYTH®
2	Objectif	4500	3000		3 750 000		INSTITUTE™
3	Variables	X	Y				
4	Valeurs optimales	300	800		Contraintes	Sens	B-Limites
5	Contrainte 1	4	3		3 600	<=	3 600
6	Contrainte 2	2	1		1 400	<=	1 400
7	Contrainte 3	1	0		300	<=	500
8	Contrainte 4	0	1		800	<=	1 000

Le nombre de chaque type de machine à produire et la valeur de l'objectif sont affichés dans les cellules prévues à cet effet dans le tableau (X=300, Y=800, Z=3 750 000).

Pour maximiser son profit, la firme MAGIX devra produire 300 unités de l'ordinateur PT133 et 800 unités de l'ordinateur DX4100, ce qui lui procurera un profit total de 3 750 000.

Rapports du Solveur

Le Solveur est un outil puissant qui propose en plus du résultat, un Rapport sur les Réponses, un Rapport de sensibilité et un Rapport des limites.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 14.0 Rapport des réponses						
2	Feuille : [ProgLin.xlsx]Calcul						
3	Date du rapport : 15/04/2017 02:22:25						
4	Résultat : Le Solveur a trouvé une solution satisfaisant toutes les contraintes et les						
5	Moteur du solveur			conditions d'optimisation.			
9	Options du solveur						
12							
13	Cellule objectif (Max)						
14	Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale			
15	\$E\$2	Objectif Valeur objectif	0	3 750 000			
16							
17	Cellules variables						
18	Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale	Entier		
19	\$B\$4	Valeurs optimales X	0	300	Suite		
20	\$C\$4	Valeurs optimales Y	0	800	Suite		
21							
22	Contraintes						
23	Cellule	Nom	Valeur de la cellule	Formule	État	Marge	
24	\$E\$5	Contrainte 1 Contraintes	3 600	\$E\$5<=\$G\$5	Lié	0	
25	\$E\$6	Contrainte 2 Contraintes	1 400	\$E\$6<=\$G\$6	Lié	0	
26	\$E\$7	Contrainte 3 Contraintes	300	\$E\$7<=\$G\$7	Non lié	200	
27	\$E\$8	Contrainte 4 Contraintes	800	\$E\$8<=\$G\$8	Non lié	200	

Saturation, dualité et shadow price

Lorsqu'à l'optimum, la partie gauche de la contrainte est égale à la valeur limite à droite, on dit que la contrainte est « liée » ou « saturée ». C'est le cas des deux premières contraintes. Dans le cas contraire, on dit que la contrainte est « non liée » ou « non saturée ». C'est le cas des deux dernières contraintes. La différence est appelée « marge ».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 14.0 Rapport des limites									
2	Feuille : [ProgLin.xlsx]Calcul									
3	Date du rapport : 15/04/2017 02:22:25									
4										
5										
6	objectif									
7	Cellule	Nom	Valeur							
8	\$E\$2	Objectif Valeur objectif	3 750 000							
9										
10										
11	Variable			inférieure		objectif		supérieure		objectif
12	Cellule	Nom	Valeur	Limite	Résultat	Limite	Résultat	Limite	Résultat	
13	\$B\$4	Valeurs optimales X	300	0	2 400 000			300	3 750 000	
14	\$C\$4	Valeurs optimales Y	800	0	1 350 000			800	3 750 000	

Le programme résolu ci-dessus peut être considéré comme le premier, le « programme primal ». On peut en déduire le programme réciproque, le « programme dual ». Si l'objectif primal est à maximiser, alors l'objectif dual sera à minimiser, et vice versa. La dualité permet d'établir que le coût marginal (*shadow price*) d'une ressource non saturée est nul car c'est une ressource « abondante », disponible en excès.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Rapport de la sensibilité							
2	Feuille : [ProgLin.xlsx]Calcul							
3	Date du rapport : 15/04/2017 02:22:25							
4								
5								
6	Cellules variables							
7			finale	réduit	objectif	admissible	admissible	
8	Cellule	Nom	Valeur	Coût	Coefficient	Augmentation	Diminution	
9	\$B\$4	Valeurs optimales X	300	0	4500	1500	500	
10	\$C\$4	Valeurs optimales Y	800	0	3000	375	750	
11								
12	Contraintes							
13			finale	Ombre	Contrainte	admissible	admissible	
14	Cellule	Nom	Valeur	Coût	à droite	Augmentation	Diminution	
15	\$E\$5	Contrainte 1 Contraintes	3600	750	3600	200	400	
16	\$E\$6	Contrainte 2 Contraintes	1400	750	1400	133,3333333	100	
17	\$E\$7	Contrainte 3 Contraintes	300	0	500	1E+30	200	
18	\$E\$8	Contrainte 4 Contraintes	800	0	1000	1E+30	200	

ELYTH® MANPOWER™

PROGICIEL DE GESTION DU PERSONNEL ET DE LA PAYE - DECLARATION SOCIALES ET FISCALES - NOUVEAU CODE DES IMPOTS

INFORMATIQUE APPLIQUEE A LA GESTION DES RESSOURCES HUMAINES - MANUEL POUR ENTREPRISES - LICENCE - MASTER

Sources

Cet article initialement intitulé « Résolution de Programme linéaire avec le Solveur » est extrait du cours de Techniques Quantitatives Appliquées à la Gestion (TQAG) de Magloire LANHA à l'Université Nationale du Bénin (1994-2000). L'énoncé et la résolution graphique sont initialement publiés dans Le livre « Manuel d'entraînement en Comptabilité Analytique » de Charles KOUPHIN et Magloire LANHA, *Langel Editions*, Cotonou, 1991, 100p. ELYTH® ACADEMIC PUBLISHING™ rééditera bientôt ce livre, revu, mis à jour et augmenté. Les titulaires d'un compte gratuit d'ELYTH®, pourront bientôt réserver leur exemplaire dans le menu [Mon Elyth], sous-menu [Mes Livres d'Elyth].

ELYTH® ACROPOLE™

PROGICIEL DE GESTION DES IMMOBILISATIONS - ETATS COMPTABLES DES IMMOBILISATIONS - LIASSE FISCALE

INFORMATIQUE APPLIQUEE A LA GESTION DES IMMOBILISATIONS - MANUEL POUR ENTREPRISES - LICENCE - MASTER

A propos de l'auteur



Magloire Lanha est Professeur Agrégé des Facultés d'Economie et de Gestion.

Il est auteur de nombreux Articles, Manuels, Logiciels et Formations en ligne sur le site d'Elyth®: www.elyth.net .

Vous pouvez lui écrire à l'adresse : maglanha@elyth.net.

Source : www.elyth.net/pdf/articles/2017/ElythNews20170415.pdf

Pour en savoir plus : www.elyth.net