

ANALYSE DE LA STABILITE LINEAIRE D'UN MILIEU POREUX ANISOTROPE EN ROTATION, SATURE PAR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN SOUMIS A L'ACTION DE LA FORCE CENTRIFUGE.

ANALYSIS OF THE LINEAR STABILITY OF THE ANISOTROPIC POROUS MEDIA IN ROTATING, SATURATE BY A NON NEWTONIEN FLUID SUBJECT TO THE ACTION OF THE CENTRIFUGAL BODY FORCE.

VODOUNNOU E.C., AHOUANNOU* C., AKOWANOU C., DEGAN G.

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées (LEMA)
Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi/ Université d'Abomey-Calavi,
01 BP 2009 Cotonou (Bénin).

Auteur correspondant : E-mail : ahouannou_clem@yahoo.fr

(Reçu le 24 Mars 2014 ; Révisé le 18 Mai 2014 ; Accepté le 10 Juin 2014)

RESUME

La présente étude porte sur la stabilité linéaire d'un milieu poreux anisotrope en rotation, saturé par un fluide non newtonien dans une cavité rectangulaire chauffé sur le côté, soumis à l'effet de la force centrifuge. L'état de la stabilité marginale est établi en déterminant le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique. Nous avons constaté l'effet des paramètres K^* et φ de l'anisotropie sur le seuil de convection.

Mots clés : Milieu poreux anisotrope en rotation, force centrifuge, stabilité linéaire, Rayleigh critique, seuil de convection.

ABSTRACT

The present survey carries on the linear stability of middle in rotating anisotropic porous media saturated by a non-Newtonian fluid in an oblong cavity heated on the side submitted to the effect of the centrifugal force. The state of the marginal stability is established while determining the number of critical Rayleigh and the wave number of critical wave. We noted the effect of the anisotropic parameters K^* and φ on the doorstep of convection.

Keywords: Rotating porous anisotropic media, centrifugal force, linear stability, critical Rayleigh; doorstep of convection.

INTRODUCTION

Le présent article traite de l'étude de la stabilité linéaire dans un milieu poreux anisotrope en rotation saturé par un fluide viscoélastique, chauffé par le côté. L'étude des fluides viscoélastiques est d'un grand intérêt dans de nombreux domaines des sciences modernes de l'ingénierie et de la technologie comme le traitement des matériaux, du pétrole,

de la chimie et des industries nucléaires, de la géophysique, biologie et de l'ingénierie biomécanique.

Vadasz P. (1994) a mené une recherche analytique tridimensionnelle sur l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux hétérogène confiné dans une cavité rectangulaire ($0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq H$; $0 \leq z \leq H$) en rotation. La perméabilité du milieu

poreux varie dans la direction d'axe de coordonnées z . Les résultats de ses travaux montrent que pour un gradient de pression appliqué sur les faces $x = 0$ et $x = L$, il apparaît un écoulement principal du fluide dans la direction horizontale d'axe (o, \vec{x}) .

La solution analytique trouvée demeure valable pour de grands nombres d'Ekman (Ek), ce qui confirme les conditions d'applications pratiques.

Le même auteur, a recherché numériquement les effets de la force centrifuge résultant de la rotation d'une cavité rectangulaire sur le phénomène de convection thermique dans le milieu poreux confiné dans cette enceinte. Il a montré que pour les solutions analytiques simples, le rapport de forme géométrique $a = H/L$ où H est la hauteur de l'enceinte et L la longueur du domaine rectangulaire, influence grandement l'écoulement et le transfert de chaleur dépend du nombre de Rayleigh modifié R_{aw} qui doit rester faible. Il a établi que pour l'écoulement bidimensionnel dans le milieu poreux, le nombre de Nusselt dépend linéairement du nombre de Rayleigh modifié R_{aw} avec une pente fonction du nombre "a" (facteur de forme géométrique du domaine). L'auteur a aussi recherché une solution analytique au problème de la convection naturelle générée par la force centrifuge dans le milieu poreux contenu dans ce domaine en rotation et chauffé par le haut. Pour avoir supposé la composante verticale ω de la vitesse d'écoulement et de la température T indépendantes de la coordonnée horizontale x , $W(x, z) = W(z)$ et $T(x, z) = T(z)$, il a trouvé que le domaine de validité de cette solution analytique doit être restreinte. Le nombre de Nusselt varie linéairement avec le nombre de Rayleigh modifié R_{aw} pour de faibles valeurs de ce dernier. Il ressort que mis à part le flux de chaleur lié à l'écoulement du fluide dans la direction d'axe de coordonnée x qui demeure important, il apparaît un flux de chaleur dans la direction verticale.

Vadasz P. (1999) a mené une investigation numérique et analytique sur la convection naturelle bidimensionnelle en milieu poreux isotrope en perméabilité confiné dans une

enceinte rectangulaire en rotation. L'effet de la force centrifuge sur le développement et la stabilité de la convection naturelle dans une couche poreuse verticale exposée latéralement à un flux de chaleur constant colinéaire à la force centrifuge a été investigué.

Enock P. et Tyvand A. (1984) sur la base des équations de Darcy-Boussinesq pour la convection thermique en milieu poreux, en rotation, ont étudié le problème en régime permanent de la convection bidimensionnelle dans une couche poreuse en rotation. Ils ont montré que ce problème est équivalent à celui du milieu poreux anisotrope relativement à une nouvelle variable adimensionnelle ζ , caractérisant le rapport de perméabilité du milieu. Suivant les résultats qu'ils ont obtenus, on peut déduire des résultats de base sur la convection thermique dans une couche poreuse en rotation à partir de l'analyse faite sur la convection thermique en milieu poreux anisotrope non mise en mouvement de rotation.

Jong J.J. et Jian S. L. (1987), ont fait une étude sur la convection thermique en régime transitoire dans une couche poreuse dont les surfaces supérieure et inférieure libres, initialement à la même température T_0 , sont soumises à un chauffage constant par le bas. Ils se sont également intéressés l'étude analytique et numérique des critères d'apparition en régime permanent et transitoire de la convection thermique bidimensionnelle en milieu poreux en rotation. Le milieu poreux anisotrope en perméabilité est tel que ses frontières limites supérieure et inférieure sont rigides. La paroi rigide inférieure est chauffée à un rythme constant c de chauffage de façon à générer une distribution linéaire de la température dans la direction verticale. L'instabilité liée à l'anisotropie en perméabilité de régime poreux, saturé par un fluide a été analysée par la technique de calcul du volume moyen d'écoulement. Ils ont déterminé les nombres de Rayleigh critique R_c et les nombres d'onde critiques a_c pour l'apparition de la convection dans le milieu anisotrope.

Govender S. (2002) a étudié la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope

en rotation soumise à la force centrifuge. Il a utilisé l'équation de Darcy pour décrire l'écoulement et a constaté que la convection est stabilisée lorsque le rapport des paramètres thermiques et mécaniques anisotropes croît en amplitude.

Nield et Bejan (1999) et Bejan (2004) ont établi des revues complètes des principes fondamentaux de la convection de la chaleur dans les milieux poreux.

Dègan G. (1997) a mené une investigation numérique et analytique de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire confinée par un milieu poreux anisotrope en perméabilité et chauffé isothermiquement par les côtés. Les axes principaux de la perméabilité sont choisis inclinés d'un angle θ par rapport au champ gravitationnel. Les résultats ont montré que le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* et l'angle d'inclinaison θ des axes principaux ont tous deux une grande influence sur le système. En particulier, le transfert de chaleur maximale (minimale) est obtenu lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux anisotrope ayant la perméabilité est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel.

NOMENCLATURE

μ : Viscosité dynamique du fluide saturant le milieu poreux ;
 \vec{g} : Vecteur champ de pesanteur ;
 p' : Pression de la vapeur saturante ;
 $\vec{\Omega}(0, 0, \Omega)$: Vecteur vitesse de rotation de l'enceinte ;
 \vec{r}' : Vecteur position ;
 \vec{K} : Tenseur de perméabilité du troisième ordre ;
 σ : Rapport des capacités thermiques ;
 \vec{V} : Vecteur vitesse de filtration du fluide dans le milieu poreux ;
 $\Delta T = T_H - T_C$: Différence de température entre les deux surfaces ;
 $R_a = \frac{\kappa_1 \rho_0 \Omega^2 H^2 \beta \Delta T}{\mu \alpha}$: Nombre de Rayleigh pour la force centrifuge ;
 u' ; v' et w' : Composants respectifs du vecteur

vitesse suivant les axes (o, x) , (o, y) et (o, z) ;
 k_y et k_z : Nombres d'ondes décrivant la périodicité de la perturbation dans les directions y et z respectivement ;
 $k_y^2 + k_z^2 = k^2$: Nombre d'onde ;
 $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$ et
 $\delta_{m+n, 2p-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } m + n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m + n \text{ est pair} \end{cases}$;
 Les kronecker
 $a = \cos^2 \varphi + K^* \sin^2 \varphi$;
 $b = \sin^2 \varphi + K^* \cos^2 \varphi$;
 $c = \frac{1}{2}(K^* - 1) \sin 2\varphi$: Eléments de l'inverse du tenseur de perméabilité ;
 φ : Angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité ;
 k_1, k_2 et k_3 : Perméabilités suivant les directions principales ;
 $K^* = K_1/K_2$ et $\xi = K_1/K_3$: Rapport d'anisotropie en perméabilité ;
 ρ : Densité du fluide ;
 \hat{e}_x ; \hat{e}_y et \hat{e}_z : Vecteurs unitaires dans les directions principales.

I- MODELE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

1.1. Description du modèle physique

Le modèle physique considéré à la figure 1 est celui d'une enceinte parallélépipédique à parois planes. La paroi horizontale inférieure est celle symbolisant la poêle qui est chauffée par l'une des faces latérales à une température constante T_H pendant que l'autre face latérale est à la température T_C constante, telle que ($T_H > T_C$). La pâte de manioc contenue dans l'enceinte constitue un milieu poreux saturé par l'amidon assimilable à un fluide non newtonien. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité dont les directions sont orientées obliquement par rapport à l'axe verticale (Figure 1). Le système milieu poreux-enceinte est soumis à un mouvement de rotation entretenu, de fréquence constante N .

Dès l'amorce du chauffage, le milieu poreux anisotrope est le siège de phénomènes thermo convectifs que nous allons étudier.

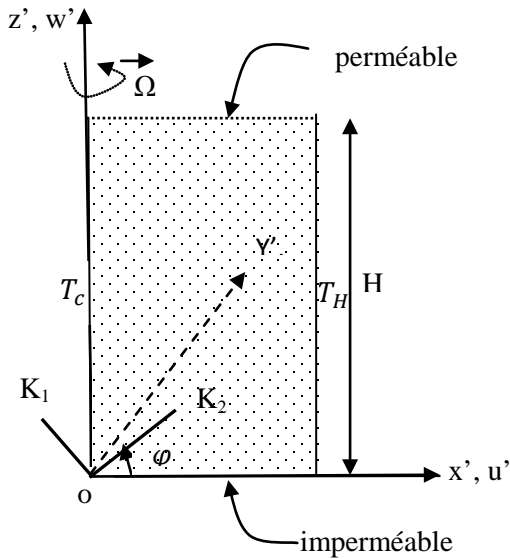


Figure 1 : Modèle physique-Cavité rectangulaire en rotation et axes de coordonnées, contenant le milieu poreux anisotrope.

I. EQUATIONS GOUVERNANTES

Les équations gouvernant notre système s'écrivent:

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}' = \frac{\bar{K}}{\mu} \left[-\vec{\nabla}P' + \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla}' \left| \vec{\Omega} \wedge \vec{r}' \right|^2 \right] \tag{2}$$

$$\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + \vec{V}' \cdot (\vec{\nabla}' T') = \alpha \nabla'^2 T' \tag{3}$$

1.1. Adimensionnalisation des équations

De l'échelle de normalisation, nous avons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{H}; y = \frac{y'}{H}; u = \frac{u'}{\alpha/H}; v = \frac{v'}{\alpha/H}; \\ w &= \frac{w'}{\alpha/H}; T = \frac{T' - T_0}{\Delta T}; t = \frac{t'}{H^2 \sigma / \alpha}; p \\ &= \frac{K_1}{\alpha \mu} P' \end{aligned} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{5}$$

$$(\bar{K})^{-1} \vec{\nabla} = -\vec{\nabla}P - Ra_x T \hat{e}_x \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} T) = \nabla^2 T \tag{7}$$

où $Ra = \frac{K_1 \rho_0 \Omega^2 H^2 \beta \Delta T}{\mu \alpha}$: Nombre de Rayleigh pour la force centrifuge.

1.2. Les équations à l'état perturbé

A l'état de base, nous avons la conduction pure :

$$u_b = v_b = w_b = 0; P_b = -\frac{1}{3} Ra_x x^3 + \text{constante}; T_b = x \tag{8}$$

La question est de savoir si cette solution sans mouvement du fluide prévaudra toujours, quelle que soit la différence de température ΔT que nous allons imposer. Nous allons répondre à cette question en lançant une expérience de stabilité de type décrit dans le cadre de la transition en convection de l'écoulement laminaire-turbulent. L'expérience de stabilité linéaire consiste à perturber la solution de base et à observer dans quelles conditions la perturbation imposée croît en amplitude. Ainsi, nous substituons

$$\begin{aligned} T(x', y', t') &= T_b(y') + T'(x', y', t') \\ v(x', y', t') &= 0 + v'(x', y', t') \\ u(x', y', t') &= 0 + u'(x', y', t') \\ w(x', y', t') &= 0 + w'(x', y', t') \end{aligned}$$

Transitoire base perturbation

dans les équations qui régissent le régime transitoire ; nous obtenons les équations suivantes à l'état perturbé:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}' = 0 \tag{9}$$

$$(\bar{K})^{-1} \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}P' - Ra_x T' \hat{e}_x \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla'^2 \right) T' + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} + u' = 0 \tag{11}$$

Dans l'équation (11), nous avons la possibilité d'éliminer les termes non linéaires $(u' \frac{\partial T'}{\partial x}; v' \frac{\partial T'}{\partial y} \text{ et } w' \frac{\partial T'}{\partial z})$ en faisant l'hypothèse que le débit du fluide et la température de perturbations sont négligeables. Ainsi, dans l'équation (11), on ne retient que les termes du premier ordre. Nous obtenons donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}' = 0 \tag{9}$$

$$(\bar{K})^{-1} \vec{\nabla}' = -\vec{\nabla}P' - Ra_x T' \hat{e}_x \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla'^2 \right) T' + u' = 0 \tag{12}$$

Analyse de la stabilité linéaire d'un milieu poreux anisotrope en rotation, saturé par un fluide non-newtonien soumis à l'action de la force centrifuge.

Nous allons éliminer les termes de pression obtenons le système d'équations (13) ci-dessous :
 dans l'équation (10) en prenant deux fois le dessous :
 nabra ($\vec{\nabla}$) vectoriel l'équation (10), nous

$$\begin{aligned} & \left(\xi \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} - c \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial x} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + c \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) = Ra \cdot x \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \\ & - \left(-\xi \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} - c \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + c \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) = -Ra \left(x \frac{\partial^2 T'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial T'}{\partial y} \right) \quad (13) \\ & \left(-\xi \frac{\partial^2 w'}{\partial y \partial z} + a \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial z} - c \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial z} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} - \xi \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial z} - b \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial z} \right) = -Ra \left(x \frac{\partial^2 T'}{\partial x \partial z} + \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

La composante de ce système d'équations suivant l'axe (\mathbf{o}, \mathbf{x}) suffit pour résoudre le problème (selon Vadasz) ; nous obtenons donc :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ & \left(\xi \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} - c \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial x} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - a \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + c \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) = Ra \cdot x \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) \quad (14) \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T' + u' = 0 \end{aligned} \right.$$

Nous allons réécrire ces équations en supposant que $\vec{V}'(\mathbf{u}', \mathbf{0}, \mathbf{w}')$ et nous allons utiliser l'équation de continuité $\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right)$. Le système d'équations à résoudre devient donc :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \xi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] u' + Ra \cdot x \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (15) \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) T' = -u' \end{aligned} \right.$$

En appliquant l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right)$ à la première ligne de ce système d'équations (15), nous obtenons l'équation de perturbation de température sous la forme :

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \left[a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \xi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] - Ra \cdot x \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} T' = 0 \quad (16)$$

1.3. Analyse dans le mode normal

La condition initiale à ce problème transitoire est arbitraire ; mais, inspiré par les observations visuelles des cellules de Bénard, il est logique de supposer des variables sinusoïdales en (y et z) et de la variable exponentielle en t :

$$T = A_n \Theta(x) e^{\sigma t + i(k_y y + k_z z)} \quad (17)$$

En substituant l'équation (17) dans l'équation (16), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & [(D^2 - k^2 - \sigma)(\xi D^2 - ak^2) \\ & \quad + ick_y(D^2 - k^2 - \sigma)D \\ & \quad - R_a x k^2] \Theta = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Avec $D \equiv \frac{d}{dx}$

Les conditions aux limites appropriées sont :

$$\begin{cases} x = 0, & \Theta = 0 \\ x = 1, & \Theta = 1 \end{cases} \quad (19)$$

L'équation (18) sera résolue par la méthode de Galerkin. Par conséquent, $\Theta(x)$ est développée en séries de fonctions triviales orthogonales qui satisfont les conditions aux limites définies l'équation (19) :

$$\Theta(x) = \sum_{i=1}^N a_n \sin(n\pi x)$$

En introduisant l'expression de $\Theta(x)$ dans l'équation (18), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \{ & [(n^2\pi^2 + k^2 - \sigma)(\xi n^2\pi^2 + ak^2) - R_a k^2 x] \sin(n\pi x) - ick_y n\pi(n^2\pi^2 + k^2 - \sigma) \cos(n\pi x) \} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Avec

$i = \sqrt{-1}$, k_y et k_z les nombres d'ondes décrivant la périodicité de la perturbation dans les directions y et z respectivement avec $k_y^2 + k_z^2 = k^2$. σ étant le taux d'accroissement de la stabilité.

ETUDE DE LA STABILITE MARGINALE: $\sigma = 0$

Nous allons multiplier l'équation (20) par $\sin(m\pi x)$ puis intégrer sur le domaine $[0 ; 1]$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \left\{ & [(n^2\pi^2 + k^2)(\xi n^2\pi^2 + ak^2)] \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx \right. \\ & - R_a k^2 \int_0^1 x \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx \\ & \left. - ick_y n\pi(n^2\pi^2 + k^2) \int_0^1 \sin(m\pi x) \cos(n\pi x) dx \right\} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \left\{ & [(n^2\pi^2 + k^2)(\xi n^2\pi^2 + ak^2) - \frac{1}{2} R_a k^2] \frac{\delta_{mn}}{2} \right. \\ & \left. + \left[\frac{4m.n.R_a k^2}{\pi^2(m^2 - n^2)^2} - \frac{i4m.n.ck_y(n^2\pi^2 + k^2)}{\pi(m^2 - n^2)} \right] \delta_{m+n,2p-1} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Avec $\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$ et $\delta_{m+n,2p-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } m+n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m+n \text{ est pair} \end{cases}$

Analyse de la stabilité linéaire d'un milieu poreux anisotrope en rotation, saturé par un fluide non-newtonien soumis à l'action de la force centrifuge.

$N=1,2,\dots, 7$ et P un entier quelconque

Posons $m = 1$ et faisons varier $n = 1$ à 2 , nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \left[(\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2) - \frac{1}{2}R_a k^2 \right] a_1 + \left[\frac{8R_a k^2}{9\pi^2} + \frac{i8ck_y(4\pi^2 + k^2)}{3\pi} \right] a_2 = 0 \quad (23)$$

Posons $m = 2$ et faisons varier $n = 1$ à 2 , nous obtenons :

$$\left[\frac{8R_a k^2}{9\pi^2} - \frac{i8ck_y(\pi^2 + k^2)}{3\pi} \right] a_1 + \frac{1}{2} \left[(4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2) - \frac{1}{2}R_a k^2 \right] a_2 = 0 \quad (24)$$

Ecrivons la forme matricielle $L(a_n) = 0$ des équations (23) et (24), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[(\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2) - \frac{1}{2}R_a k^2 \right] & \left[\frac{8R_a k^2}{9\pi^2} + \frac{i8ck_y(4\pi^2 + k^2)}{3\pi} \right] \\ \left[\frac{8R_a k^2}{9\pi^2} - \frac{i8ck_y(\pi^2 + k^2)}{3\pi} \right] & \frac{1}{2} \left[(4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2) - \frac{1}{2}R_a k^2 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (25)$$

Cette équation admet une solution si $\det(L) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{1}{16} - \frac{64}{81\pi^4} \right) k^4 R_a^2 - \frac{k^2}{8} [(\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2) + (4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2)] R_a \\ + \frac{1}{4} (\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2)(4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2) \\ - \frac{64ck_y^2 c}{9\pi^2} (\pi^2 + k^2)(4\pi^2 + k^2)^2 - \frac{i64ck_y k^2}{9\pi} R_a \\ = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

La signification physique du nombre de Rayleigh veut que ce nombre soit un nombre réel ; la partie imaginaire de l'équation (26) est donc nulle :

$$\Rightarrow \frac{64ck_y k^2}{9\pi} = 0$$

Or c et k sont non nuls ; c'est donc $k_y = 0$

L'équation (26) devient alors :

$$\left(\frac{1}{16} - \frac{64}{81\pi^4} \right) k^4 R_a^2 - \frac{k^2}{8} \mathcal{L} R_a + \frac{1}{4} \delta = 0 \quad (27)$$

Avec

$$\begin{cases} \delta = (\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2)(4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2) \\ \mathcal{L} = [(\pi^2 + k^2)(\xi\pi^2 + ak^2) + (4\pi^2 + k^2)(4\pi^2\xi + ak^2)] \\ \Rightarrow \frac{(3\pi)^4 - 1024}{(3\pi)^4} k^4 R_a^2 - 2\mathcal{L} k^2 R_a + 4\delta = 0 \\ \Delta' = (\mathcal{L} k^2)^2 - 4\delta \left(\frac{(3\pi)^4 - 1024}{(3\pi)^4} k^4 \right) > 0 \end{cases}$$

$$Ra = \frac{\mathcal{E}k^2 \pm \sqrt{(\mathcal{E}k^2)^2 - 4\delta \left(\frac{(3\pi)^4 - 1024}{(3\pi)^4} k^4 \right)}}{\left(\frac{(3\pi)^4 - 1024}{(3\pi)^4} k^4 \right)}$$

Posons

$$\gamma = \frac{(3\pi)^4 - 2^{10}}{(3\pi)^4}$$

L'expression de R_a devient : $R_a = \frac{1}{\gamma k^2} \left(\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4\delta\gamma} \right)$ (28)

IV. RESULTATS ET DISCUSSION

Les figures 2, 3 et 4 illustrent respectivement l'effet du rapport d'anisotropie en perméabilité $K^* = \frac{K_1}{K_2}$, l'angle d'orientation φ des axes principaux de perméabilité et l'effet du rapport d'anisotropie $\xi = \frac{K_1}{K_3}$ sur la stabilité linéaire de la convection dans un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non newtonien.

Dans la figure 2, pour $K^* = 1$ (milieu isotrope), la valeur du nombre de Rayleigh critique $Ra_c = 77,0829$ pour un nombre d'onde critique de $k_c = 3,19$.

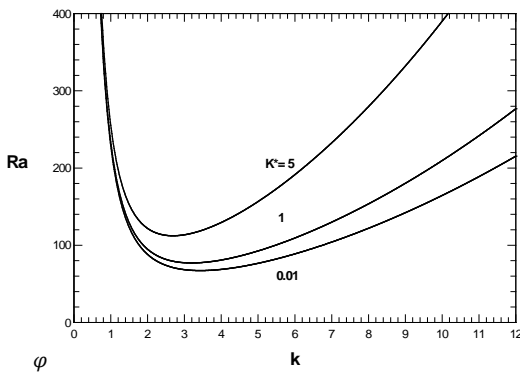


Figure 2 : Variation de Ra en fonction de k pour différentes valeurs de K^* avec $\xi = 1$ et $\varphi = 45^\circ$

Ces résultats correspondent bien à ceux trouvés par Vadasz ($Ra_{\omega c} = 77,0828 ; k_c = 1,017\pi$). Nous constatons que le nombre de Rayleigh

critique croît avec K^* . Autrement dit si $K^* < 1$, le nombre de Rayleigh critique Ra_c est plus faible et si $K^* > 1$, ce nombre est élevé. Ceci montre que le rapport d'anisotropie en perméabilité dans les directions principales K_1 et K_2 a un effet sur l'amorce de la convection dans le milieu.

Pour la figure 3, le nombre de Rayleigh critique décroît avec l'angle d'orientation des axes en perméabilité.

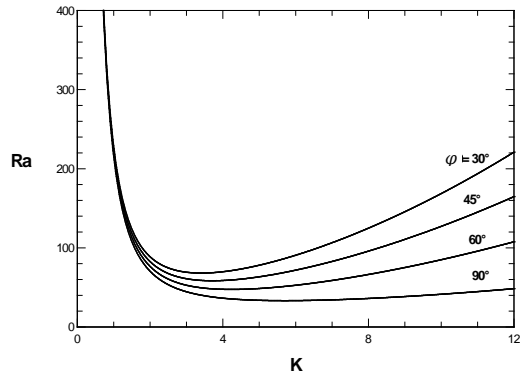


Figure 3 : Variation de Ra en fonction de k pour différentes valeurs de φ avec $K^* = 0.1$ et $\xi = 1$.

En effet, le début de la convection est vite atteint lorsque les directions principales des axes de perméabilité s'écartent.

Pour la figure 4, nous constatons que le nombre de Rayleigh critique croît avec ξ .

Analyse de la stabilité linéaire d'un milieu poreux anisotrope en rotation, satire par un fluide non-newtonien soumis à l'action de la force centrifuge.

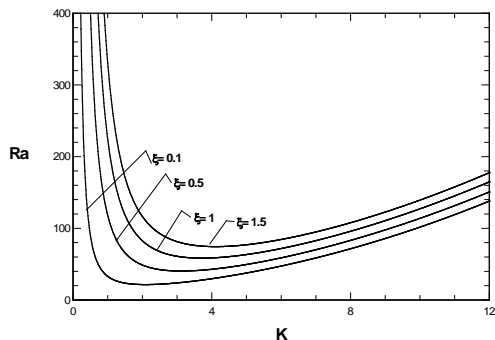


Figure 4 : Variation de Ra en fonction de k pour différentes valeurs de ξ avec $K^* = 0.1$ et $\varphi = 45^\circ$

Autrement dit si $\xi < 1$, le nombre de Rayleigh critique Ra_c est plus faible et si $\xi > 1$, ce nombre est élevé. Ceci montre que le rapport d'anisotropie en perméabilité dans les directions principales K_1 et K_3 a un effet sur l'amorce de la convection dans le milieu.

V. CONCLUSION

Le problème de la stabilité linéaire d'un milieu

poreux anisotrope en rotation soumis à l'action d'une force centrifuge a été étudié. De cette étude, il ressort les conclusions suivantes :

- 1.) Une faible valeur du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* , permet de vite atteindre le seuil de la convection ;
- 2.) Nous avons obtenu le même effet pour le rapport d'anisotropie en perméabilité ξ ;

Par contre le seuil de la convection augmente lorsque nous augmentons l'angle d'orientation φ des axes principaux de perméabilité. Autrement dit, lorsque les directions principales de perméabilité coïncident avec les directions des axes principaux ($\varphi = 90^\circ$), le seuil de la convection est vite atteint par contre lorsque les directions principales de perméabilité sont confondues avec l'axe principal (o, x) c'est-à-dire ($\varphi = 0^\circ$), le seuil de la convection est élevé.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. ANOJ K., BHADAURIA B.S., 2011. Thermal instability in a rotating anisotropic porous layer saturated by a visco elastic fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics Journal Home*, (46), 47-56.
2. BEJAN A., 1995. Convection Heat Transfer. 2nd édition, Wiley, New York, 128p.
3. CHANDRASEKHAR S., 1961. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Calrendon Press, Oxford University, 100p.
4. DEGAN G., VASSEUR P., 2003. Influence of anisotropy on convection in porous media with non-uniform thermal gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46, 781-789.
5. DEGAN G., VASSEUR, P., AWANOU
6. N.C., 2005. Anisotropy effects on non-Darcy natural convection from concentrated heat. *Acta Mechanica*, 179 (1-2), 111-124
7. ESSOUN M., 2011. Rotating Rayleigh-Bénard convection in the presence of helical force. *Thèse de Doctorat IMSP Bénin*, 101p.
8. GOVENDER S., 2002. Oscillatory convection induced by gravity and centrifugal forces in a rotating porous layer distant from the axis of rotation. *International Journal of Engineering Science*, 41(6), 539-545.
9. GOVENDER S., 2006. On the Effect of Anisotropy on the Stability of Convection in Rotating Porous Media Transport in Porous Media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(5), 781-789.
10. JIANHONG K., CEJI F., WENCHANG T.,

2011. Tan Thermal convective instability of viscoelastic fluids in a rotating porous layer heated from below. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics Journal Home*, (166), 93-101.
11. JONG J.J. and JIAN S.L., 1987. Transient thermal in a rotating porous medium confined between two rigid boundaries. *International communication, Heat and Mass transfert*, Vol 14, N°0735-1933/9, 147-153.
12. NIELD D.A. and BEJAN A., 1992. Convection in Porous Media. *Springer Verlag, New York*, 128p.
13. PALM E. and TYVAND A., 1984. Thermal convection in a rotating porous layer. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 35, 121-123.
14. PATILP.R. and VAIDYANATHAN G., 1983. On Setting Up of convection currents in rotating porous medium under the influence of variable viscosity. *International Journal Engineering Science*, Vol. (21), 123-130.
15. VADASZ P., 1994a. Centrifugal generated free convection in a rotating porous box. *International Journal of Heat and Mass Transfert*, Vol (33)16, 2399-2404.
16. VADASZ P., 1994. Stability of free convection in a narrow porous layer subject to rotation. *International communication in Heat and Mass transfert*, Vol (21)6, 881-890.
17. VADASZ P., 1996. Convection and stability in a rotating porous layer with alternating direction of the centrifugal body forc. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 39 (8,) 1639-1647.
18. VADASZ P., GOVENDER S., 1996. Two-dimensional convection induced by gravity and centrifugal forces in a rotating porous layer far away from the axis of rotation. *International Journal Rotat. Mach.* 4 (2), 73-90.
19. VADASZ P., GOVENDER S., 2000. Stability and stationary convection induced by gravity and centrifugal forces in a rotating porous layer distant from the axis of rotation. *International Journal of Engineering Science*, 39(6), 715-732.