

INFLUENCE DE L'ANISOTROPIE HYDRODYNAMIQUE SUR LA CONVECTION FORCEE DANS UNE COUCHE POREUSE HORIZONTALE CHAUFFEE ISOTHERMIQUEMENT

C. AKOWANOU (1), G. DEGAN (1)

*(1) Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées, Ecole Polytechnique
d'Abomey-Calavi, Université d'Abomey-Calavi, B.P. 2009, Cotonou,
Bénine-mail : djidjohoako@yahoo.fr*

RESUME

Dans cette étude le transfert de chaleur par convection forcée dans un canal cylindrique horizontal, rempli d'un milieu poreux anisotrope est examiné analytiquement. Le milieu poreux saturé par un fluide visqueux est supposé anisotrope en perméabilité dont les directions principales sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. La paroi latérale du cylindre est chauffée isothermiquement à température constante. Sur la base du modèle de Darcy-Brinkman généralisé et de l'hypothèse de l'écoulement complètement développé, les expressions des champs de vitesse et de température et celle du taux de transfert de chaleur dans le canal sont exprimées en fonction des paramètres adimensionnels hydrodynamiques. Dans le cas limite des milieux de faibles porosités, Il est démontré que le taux de transfert de chaleur est maximal (minimal) lorsque l'axe principal dont la perméabilité est la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) à la gravité.

Motsclés: Transfer de chaleur- Milieu poreux anisotrope- Convection forcée.

ABSTRACT

In this paper forced convection heat transfer in a horizontal cylindrical channel filled with an anisotropic porous medium is studied analytically. The porous medium saturated with a viscous fluid is assumed anisotropic in permeability whose principal axes are oriented in a direction that is arbitrary to the gravity field. The side wall of the cylinder is isothermally heated with constant temperature. Basing the analysis on the generalized Brinkman-extended Darcy model and the hypothesis of fully-developed flow, the flow and the thermal fields and the heat transfer rate are expressed in terms of relevant non-dimensional hydrodynamic parameters. In the limiting case of low porosity media, it is demonstrated that a maxi-

mum (minimum) heat transfer rate is reached when the orientation of the principal axis with higher permeability of the anisotropic porous matrix is parallel (perpendicular) to the vertical direction.

Key words: Heat transfer - Anisotropic porous medium – Forced convection

INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide, à travers un milieu poreux, sous l'influence de différences de température est l'un des plus considérables et contemporains sujets d'intérêt à cause de ses nombreuses et importantes applications en ingénierie. La convection forcée dans des conduites d'écoulement de fluides apparaît dans beaucoup d'applications telles que dans les échangeurs de chaleur, les équipements de procédés chimiques, le transport de fluides chauffés ou refroidis, les collecteurs solaires et le refroidissement micro-électronique. Dans les conduites d'écoulement de fluides, la croissance du transfert thermique par insertion de matrice solide a été analysée par Koh et coll. [1,2]. Suivant le modèle de Darcy-Brinkman, Kaviany [3] a étudié analytiquement l'écoulement laminaire d'un fluide dans une conduite confinant un milieu poreux de porosité faible et limitée par des parois horizontales isothermes maintenues à égale température. Pour un écoulement complètement développé dans le canal, Il a montré que le transfert thermique croît avec une augmentation du rapport de forme de la matrice poreuse. En utilisant le modèle de Brinkman, Haji-sheikh et Vafai [4] ont investigué le problème de transfert de chaleur à travers un milieu poreux saturé limité par des parois imperméables. Hooman et Gurgency [5] ont étudié l'effet de la dissipation visqueuse sur l'écoulement forcé d'un fluide à travers un canal confinant un milieu poreux. En adoptant pour la fonction de dissipation visqueuse une expression regroupant trois différents modèles et en supposant l'écoulement complètement développé dans le canal, le problème a été résolu pour des conditions aux limites variées. Le problème de la convection forcée d'un fluide visqueux saturant un milieu poreux confiné par un canal circulaire chauffé isothermiquement ou par un flux constant de chaleur a été investigué numériquement par Shigeru et Koichi [6]. De leur investigation, il ressort que le taux de transfert de chaleur est indépendant du nombre de Brinkman contrairement aux résultats obtenus dans le cas où le canal est chauffé isothermiquement. Hooman et Ranjbar-Kani [7,8] ont étudié le problème

de la convection forcée dans une conduite circulaire confinant un milieu poreux et chauffée latéralement par un flux constant de chaleur. Les équations gouvernantes du phénomène ont été résolues analytiquement par la méthode des perturbations. Vasantha et Nath [9] ont étudié numériquement et analytiquement par la méthode des perturbations, la couche limite thermique qui se développe le long de la paroi interne d'un cylindre lors de la convection forcée d'un fluide à travers ce cylindre rempli d'un milieu poreux. Ces auteurs ont montré que l'épaisseur de la couche limite augmente avec le rayon de courbure du cylindre. Pour toutes les études précitées sur le thème, le milieu poreux est considéré isotrope en perméabilité alors que dans la nature, les matériaux poreux à l'image des sites géothermiques sont fortement anisotropes. L'anisotropie qui est généralement une conséquence de l'orientation préférentielle des directions de l'écoulement par rapport aux directions principales ou qui résulte de la géométrie asymétrique des grains et des fibres dont le milieu est composé, est en fait notée dans de nombreux systèmes dans l'industrie et dans la nature. C'est pour cette raison qu'une prise en compte de plus de réalisme physique dans les propriétés de la matrice solide paraît importante pour la bonne modélisation du phénomène convectif dans de tels milieux.

Malgré cet état de choses, l'anisotropie de structure du milieu n'est pas souvent considérée. Le transfert de chaleur dans une cavité verticale remplie d'un milieu poreux anisotrope en perméabilité, chauffée par les côtés et soumise à des conditions aux limites thermiques variées a été analysé par Zhang [10], Degan et coll. [11]. Emboitant le pas à ces auteurs, Akowanou et coll. [12] ont étudié l'écoulement convectif dans une couche poreuse horizontale anisotrope en perméabilité et soumise à l'action d'un champ magnétique transversal. Cette étude a révélé que le transfert de chaleur est fortement influencé par les paramètres d'anisotropie en perméabilité du milieu poreux. Degan et Coll. [13] ont étudié l'influence de l'anisotropie en perméabilité du milieu poreux sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection forcée dans une couche poreuse confinée entre deux plaques horizontales chauffées par un flux constant de chaleur. Ces auteurs ont analysé le problème en considérant une orientation arbitraire des directions principales de l'anisotropie en perméabilité par rapport aux axes de coordonnées. Il a été démontré que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel et minimal lorsque cette

orientation lui est perpendiculaire.

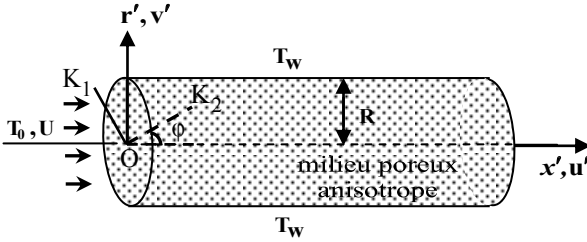
La présente étude traite de l'écoulement convectif forcé à travers un milieu poreux confiné par un canal cylindrique chauffé isothermiquement à température constante sur sa surface. La matrice du milieu poreux est anisotrope en perméabilité dont les axes principaux sont orientés arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Il sera recherché l'impact des propriétés anisotropes du milieu poreux sur les champs de vitesse et de température et sur le taux de transfert de chaleur dans le canal cylindrique.

1. FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le modèle physique tel qu'indiqué à la Figure 1 est constitué par un cylindre horizontal confinant un milieu poreux saturé par un fluide incompressible. Le milieu poreux est hydrodynamiquement anisotrope. Les perméabilités le long des axes principaux de la matrice solide du milieu poreux sont k_1 et k_2 . L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport d'anisotropie k^* ($= k_1 / k_2$) et l'angle θ que fait l'axe horizontal avec l'axe principal de perméabilité k_2 . Ainsi, la rotation des axes principaux autour de l'origine O est décrite par l'angle θ , conformément aux annotations de la figure 1. En conséquence, dans la présente analyse, les coordonnées polaires (x', r) seront utilisées dans l'étude de la structure du champ d'écoulement thermique qui de ce fait est à symétrie axiale. La surface latérale du cylindre est chauffée à la température T_w pendant que le fluide à l'entrée du canal est à la température T_0 .

Figure 1. : Modèle physique et système de coordonnées.

Le fluide saturant le milieu poreux est visqueux, incompressible et supposé en équilibre thermodynamique local en tout point avec le milieu poreux. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes.



Au regard des considérations précitées, suivant le modèle de Brinkman généralisé, la formulation mathématique du phénomène de l'écoulement laminaire bidimensionnelle du fluide à travers le milieu poreux s'écrit de la façon suivante (voir [5] et [13]):

Dans les équations (2) et (3), \vec{V}' est la vitesse de filtration du fluide dans la matrice poreuse, T' la température, μ la viscosité dynamique, p' la pression du fluide, k la conductivité thermique et \bar{K} le tenseur de perméabilité. C'est un tenseur de second ordre qui s'exprime dans le système d'axes rotatifs autour de l'origine O de la façon suivante:

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0 \quad (1)$$

$$\vec{V}' = \frac{\bar{K}}{\mu} (-\nabla p' + \mu_{eff} \nabla^2 \vec{V}') \quad (2)$$

$$(\rho c_v)_f \nabla \cdot (\vec{V}' T') = k \nabla^2 T' + \mu \Phi \quad (3)$$

Au second membre de l'équation d'énergie (équation (3)), figure le terme de dissipation visqueuse. Plusieurs modèles mathématiques de la fonction de dissipation visqueuse existent [5]. Dans la présente étude, celle envisagée, tient compte des effets de la viscosité du fluide saturant le milieu poreux et de la friction à travers la matrice poreuse à travers le terme.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 \sin^2 \varphi + K_2 \cos^2 \varphi & (K_2 - K_1) \cos \varphi \sin \varphi \\ (K_2 - K_1) \cos \varphi \sin \varphi & K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

2. RESOLUTION

En considérant l'écoulement complètement développé dans le canal, l'écoulement est unidirectionnel [14] et se fait suivant l'axe du canal (Ox'). De ce fait, la composante de la vitesse de filtration du fluide dans la direc-

tion axiale (Ox') est uniquement fonction du rayon r' du cylindre, c'est-à-dire $u' = u'(r')$. Il résulte de l'équation de continuité que la composante transversale de la vitesse (suivant la direction oy') est nulle, soit $v' = 0$. Par conséquent la température est uniquement fonction de r' ($T' = T'(r')$). Les équations gouvernantes (1) - (3) traduisant respectivement la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie se réduisent aux équations suivantes :

$$\frac{du'}{dx'} = 0 \quad (5)$$

$$cu' = \frac{K_1}{\mu} \left(\frac{\partial p'}{\partial r'} \right) \quad (6)$$

$$au' = -\frac{K_1}{\mu} \left[-\frac{dp'}{dx'} + \mu_{eff} \left(\frac{d^2u'}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{du'}{dr'} \right) \right] \quad (7)$$

$$(\rho c_p)_f u' \frac{\partial T'}{\partial x'} = k \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + \mu \left[\left(\frac{du'}{dr'} \right)^2 + \frac{a(u'^2)}{K_1} \right] \quad (8)$$

où a, b, c sont des constantes qui s'écrivent de la façon suivante :

$$a = \sin^2 \varphi + K^* \cos^2 \varphi ; c = (1 - K^*) \sin \varphi \cos \varphi ; K^* = K_1/K_2 \quad (9)$$

Les conditions aux limites thermiques et dynamiques appropriées associées aux équations précédentes s'écrivent

$$\begin{cases} r' = 0: & \frac{du'}{dr'} = 0; & T' = T_0 & (a) \\ r' = R: & u' = 0; & T' = T_w & (b) \end{cases} \quad (10)$$

R représente le rayon du canal cylindrique T_w la température à la paroi et T_0 la température du fluide à l'entrée du canal.

En utilisant les facteurs d'échelle de normalisation $[R, R^2G/\mu, \Delta T]$, on passe des variables primitives $[r', u', T]$ aux variables adimensionnelles $[r, u, \theta]$ définies telles que :

$$x = \frac{x'}{R}; u = \frac{\mu u'}{R^2 G}; \theta = \frac{T' - T_w}{\Delta T} \quad (11)$$

où $G = -(\partial p')/(\partial x')$ est l'opposé du gradient de pression, $\Delta T = (T_0 - T_w)$ l'écart de température entre le fluide à l'entrée du canal et la paroi latérale du canal. L'équation (7) devient :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \zeta^2 u + \frac{1}{\lambda} = 0 \quad (12)$$

$$\text{où } \zeta_2 = a/\lambda Da \quad (13)$$

Dans l'équation (13) $Da (=K1/R^2)$ est le nombre de Darcy $\lambda (= \mu_{eff}/\mu)$ la viscosité dynamique apparente du fluide qui, dans la présente étude est prise égale à l'unité compte tenu de l'approximation $\mu_{eff} \approx \mu$ (voir [13]). Les conditions aux limites requises pour l'équation (12) s'écrivent :

$$\begin{cases} r = 0: & \frac{du}{dr} = 0 \\ r = 1: & u = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Faisant usage des variables adimensionnelles de l'équation (11), l'équation (9) sous sa forme adimensionnelle s'écrit:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + Br \left[\left(\frac{d\hat{u}}{dr} \right)^2 + \zeta^2 \hat{u}^2 \right] \quad (15)$$

Dans l'équation (15), $\hat{u} (=u/U)$ est la vitesse réduite de $Br (= \mu U^2/k(T_0 - T_w))$ le nombre de Brinkman.

A partir d'une certaine position, éloignée de l'entrée du canal, le champ thermique devient très peu affecté par les variations de la coordonnée x (voir [14]). Dans cette région, l'équation (15) est réduite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + Br \left[\left(\frac{d\hat{u}}{dr} \right)^2 + \zeta^2 \hat{u}^2 \right] = 0 \quad (16)$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent :

$$\begin{cases} r = 0: & \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \\ r = 1: & \theta = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Tenant compte des conditions hydrodynamiques (14-a) et (14-b), la résolution de l'équation (12) par la méthode des perturbations donne la distribution de vitesse dans le milieu poreux (voir [14]). Dans la suite de l'analyse, deux cas d'intérêt pratique ont été examinés : le premier cas, relatif aux milieux à faibles porosités ($\zeta \ll 1$) et le second relatif aux milieux à fortes ($\zeta \ll 1$) .

Case 1: Milieux à porosités élevées, $\zeta \ll 1$

Ce cas correspondant à la situation physique pour laquelle $a \ll Da$ est relatif à un milieu poreux faiblement anisotrope en perméabilité et pour lequel la résistance due aux effets pariétaux est prédominante par rapport à celle due à la matrice solide, car la condition examinée ici implique que lorsque $\zeta \rightarrow 0, Da \rightarrow \infty$. Cette situation approche celle d'un milieu fluide pur pour lequel les effets d'anisotropie du milieu poreux sont hors-propos. Dans cette limite, dans l'hypothèse où la viscosité est constante, la distribution de vitesse s'écrit ([14]):

$$\hat{u} = 2(1 - r^2) \left[1 + \zeta^2 \frac{(3r^2 - 1)}{48} \right] \tag{18}$$

Avec cette distribution de vitesse, l'équation (15) est transformée et écrite de la façon suivante:

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{4}{3} Br [12r^2 + \zeta^2(6r^4 - 8r^2 + 3) + \frac{1}{48} \zeta^4(27r^6 - 54r^4 + 34r^2 - 6)] = 0 \tag{19}$$

Par une double intégration, la solution de l'équation (19) soumise aux conditions indiquées au système d'équations (17) s'écrit :

$$\theta = Br \left[1 - r^4 - \frac{\zeta^2}{9} (2r^6 - 6r^4 + 9r^2 - 5) + \frac{\zeta^4}{2304} (27r^8 - 144r^6 + 136r^4 - 96r^2 + 29) \right] = 0 \tag{20}$$

La température moyenne θ_m du fluide dans le milieu est donnée par la relation :

$$\theta_m = 2 \int_0^1 \theta \hat{u} \, r \, dr$$

A partir des expressions des champs de vitesse et de température données par les équations (18) et (20), le calcul de la température moyenne θ_m donne :

$$\theta_m = \frac{5Br}{600} \left(1 + \frac{23483}{100} \zeta^2 - \frac{979}{144} \zeta^4 \right) + O(\zeta^6) \tag{21}$$

Loin de l'entrée du canal, le milieu poreux et la paroi du canal seront en équilibre thermique. Cependant, pour une position définie en deçà de celle précédente, dans la région du canal où l'écoulement est complètement développé, un taux invariant de transfert de chaleur existe [13] et est donné par la relation:

$$Nu = 2R \frac{(\partial T' / \partial r')|_{r=R}}{k(T_w - T_m)} = - \frac{2}{\theta_m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} \tag{22}$$

En introduisant les expressions données aux équations (20) et (21) dans l'expression du Nusselt donnée à l'équation (22), le calcul du Nusselt:

$$\text{Nu} = \frac{48}{5} \frac{96 - 16\zeta^2 + 3\zeta^4}{96 + \frac{6}{25} \left(\frac{23483}{25} \zeta^2 - \frac{979}{36} \zeta^4 \right)} \quad (23)$$

Pour les milieux à porosités élevées ($\text{Da} \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 0$), les paramètres anisotropes θ et K^* et du milieu poreux sont sans effets sur le transfert de chaleur. Ceci confirme la situation physique car ce cas correspond à celui du milieu fluide. Le Nusselt tend asymptotiquement vers la valeur $\text{Nu} \approx 48/5$, valeur limite obtenue par le passé par Hooman et coll. [14].

Case 2: Milieux à porosités faibles, $\zeta \gg 1$

Ce cas correspondant à la situation physique pour laquelle Da est relatif à un milieu poreux fortement anisotrope en perméabilité et pour lequel les effets d'anisotropie sont prédominants (lorsque $\zeta \rightarrow \infty, \text{Da} \rightarrow 0$). Cette situation approche la situation d'un milieu de Darcy pur. Il résulte que, en faisant l'hypothèse selon laquelle la viscosité du fluide est constante, la distribution de vitesse s'écrit [14]:

$$\hat{u} = \left(1 + \frac{2}{\zeta}\right) (1 - r^{-1/2} e^{-\zeta(1-r)}) \quad (24)$$

En introduisant cette distribution de vitesse et sa dérivée dans l'équation (15), nous obtenons :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \text{Br}^* \left(1 + \frac{2}{\zeta}\right)^2 (1 - 2r^{-1/2} e^{-\zeta(1-r)}) = 0 \quad (25)$$

Dans l'équation (25), est le nombre de Darcy-Brinkman. En tenant compte des conditions aux limites mentionnées à l'équation (17), la résolution de l'équation (25) nous permet d'obtenir la distribution de température suivante :

$$\theta = \frac{\text{Br}^*}{4} \left[\left(1 + \frac{4}{\zeta}\right) (1 - r^2) + \frac{4}{\zeta^2} \left((1 - r^2) + 2r^{-1/2} e^{-\zeta(1-r)} \right) + \frac{32}{\zeta^3} r^{-1/2} e^{-\zeta(1-r)} \right] + O(\zeta^{-4}) \quad (26)$$

A partir des expressions des champs de vitesse et de température données par les équations (24) et (26), le calcul de la température moyenne du fluide saturant le milieu poreux donne comme résultat :

$$\theta_m = \frac{\text{Br}^*}{8} \left(1 + \frac{6}{\zeta}\right) + \text{Br}^* \left(\frac{3}{10\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^3} \left(\frac{51}{8} - 2e^{-2\zeta} \right) \right) + O(\zeta^{-4}) \quad (27)$$

En introduisant les expressions données aux équations (26) et (27) dans l'équation (22), le calcul du taux de transfert de chaleur permet d'aboutir au résultat suivant:

$$\text{Nu} = \frac{40(\zeta^3 - 2\zeta^2 + 14\zeta - 8)}{5\zeta^3 + 30\zeta^2 + 12\zeta - 5(51 - 16e^{-2\zeta})} \quad (28)$$

Dans le cas des milieux à très faibles porosités ($\text{Da} \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow \infty$), le Nusselt tend asymptotiquement vers une valeur indépendante des paramètres anisotropes du milieu poreux. Cette limite est identique à celle obtenue par le passé par Hooman et coll. [14].

3. DISCUSSION

Les Figures 2(a) et 2(b) illustrent respectivement, les distributions de vitesse et de température (équations (24) et (26)) dans le domaine constitué par le demi-cylindre supérieur lorsque $\text{Da} = 4.10^{-4}$, $\varphi = 0^\circ$ et pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* . Les courbes représentées sur la Figure 2(a) montrent que pour les différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* , la vitesse de l'écoulement est nulle à la paroi. Ceci satisfait la condition d'adhérence à la paroi qui est la condition requise lorsque l'on adopte le modèle mathématique de Brinkman. Cette vitesse croît par la suite pour atteindre son maximum sur l'axe du canal puis décroît progressivement pour s'annuler sur la paroi inférieure. Elle atteint sa valeur maximale sur l'axe du canal lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité devient plus faible.

La Figure 2(a) montre que pour $K^* < 1$ l'intensité de l'écoulement convectif est accentuée par rapport à la situation où le milieu poreux est isotrope en perméabilité ($K^* = 1$) qui est encore meilleure comparativement au cas où le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* est supérieur à l'unité ($K^* = 10$). Ce résultat est prévisible car pour un nombre de Darcy donné, $\text{Da} < 1$ (c'est-à-dire pour une valeur de K_1), une valeur de K^* telle que $K^* < 1$ considérée pour $\varphi = 0^\circ$, correspond à une augmentation de la perméabilité dans la direction horizontale, accentuant ainsi l'écoulement convectif dans le canal.

La tendance inverse est observée lorsque $K^* > 1$ ($K^* = 10$). Comme conséquence de la réduction de la vitesse, on observe une canalisation de l'écoulement le long de paroi horizontale favorisant ainsi le développement d'une couche limite le long de cette paroi.

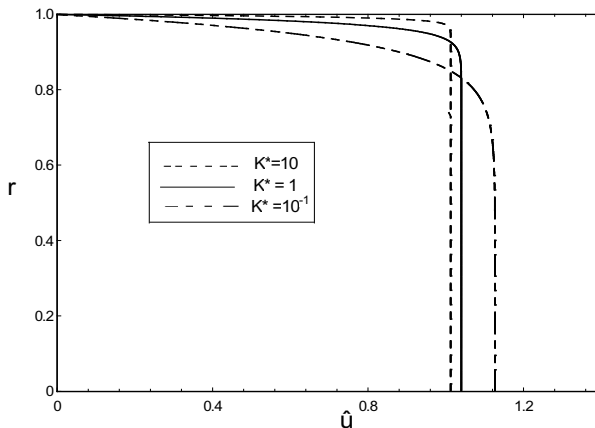


Figure 2(a): Effet du rapport d'anisotropie en perméabilité sur le champ de vitesse pour $Da = 4.10^{-4}$ et $\varphi = 0^\circ$.

Les effets de la variation du rapport d'anisotropie en perméabilité sur le profil de température sont illustrés sur la Figure 2(b). Les courbes de la Figure 2(b) montrent un profil de champ de température semblable à celui du champ de vitesse décrit précédemment. Ceci démontre de la grande influence des paramètres d'anisotropie hydrodynamique sur le phénomène convectif en milieu poreux. L'intensification de l'écoulement convectif à travers la matrice solide du milieu poreux à pour conséquence un développement du champ thermique pour un rapport d'anisotropie.

Il découle de ces observations que pour un milieu poreux de plus en plus perméable dans la direction horizontale (croissante et), le phénomène convectif est de plus en plus développé.

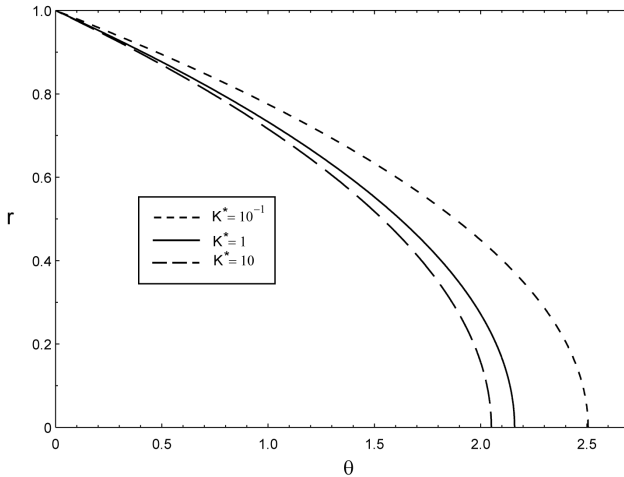


Figure 2(b): Effet du rapport d'anisotropie en perméabilité sur le champ de température pour $Da=4.10^{-4}$ et $\varphi=0^\circ$.

L'influence de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur les profils de température et de vitesse sont illustrés sur les figures 3(a) et 3(b) lorsque $Da=10^{-3}$, $K^* = 0.25$ (c'est-à-dire $K^* < 1$) et $Br^* = 8$ pour le champ de température. A cause de la vitesse imposée à l'entrée du canal, l'écoulement du fluide dans le milieu poreux est dirigé suivant l'axe du canal. Il résulte de ce fait que les distributions de vitesse et de température ont un profil parabolique. Ceci confirme l'hypothèse de l'écoulement complètement développé dans le milieu poreux avec une canalisation le long de la paroi latérale qui dénote de l'existence d'une couche limite le long de cette paroi (Figure 3(a)). L'analyse des courbes de la Figure 3(a) révèle aussi que, l'écoulement convectif est maximal lorsque $\varphi=0^\circ$ et minimal lorsque $\varphi=90^\circ$. Par contre dans le cas où $K^* = 5$ ($K^* > 1$), les résultats présentés à la figure 3(c) montre que l'écoulement convectif est maximal lorsque $\varphi=90^\circ$ et minimal lorsque $\varphi=0^\circ$.

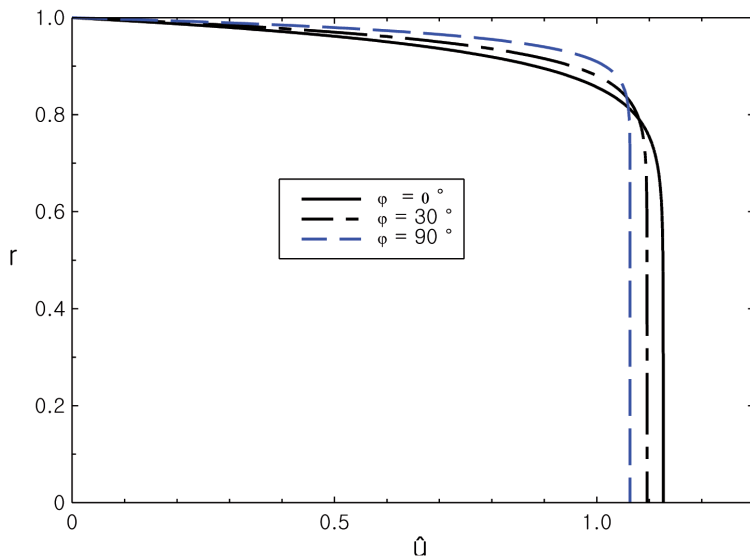


Figure 3(a).: Effet de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur le champ de vitesse lorsque $Da=10^{-3}$ et $K^*=0.25$

Il ressort de ces observations que l'écoulement convectif est maximal (minimal) lorsque l'orientation de l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Des résultats similaires ont été trouvés par le passé par Degan et col. [11], Akowanou et col. [12] lorsque ces auteurs ont étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert de chaleur par convection dans une cavité verticale chauffée isothermiquement par les côtés et confinant un milieu poreux dont les axes de perméabilité sont orientés arbitrairement.

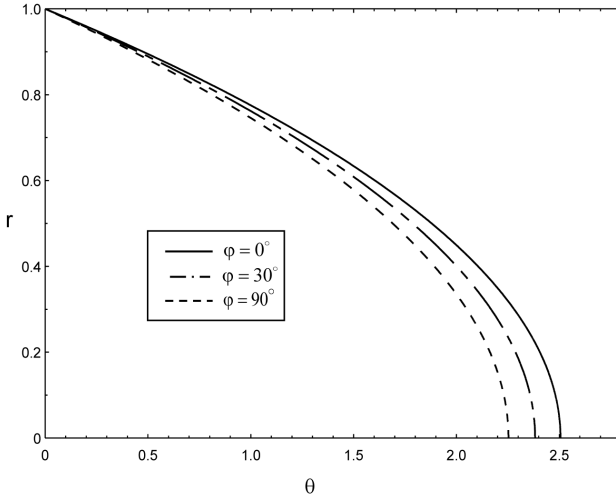


Figure 3 (b): Effet de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur le champ de température lorsque $Da=10^{-3}$ et $K^*=0.25$

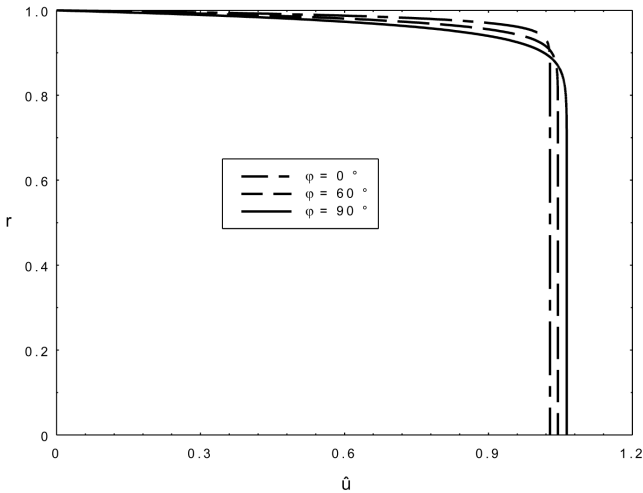


Figure 3(C): Effet de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité sur le champ de vitesse lorsque $Da = 10^{-3}$ et $K^* = 5$

La Figure 4 montre la variation du taux de transfert de chaleur en fonction du nombre de Darcy pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité pour un angle d'orientation $\varphi=0^\circ$. Cette figure montre que pour un nombre de Darcy fixé ($10^{-3} < Da < 1$), le taux de transfert de chaleur croît avec K^* . Pour un milieu poreux pur tel que $Da < 10^{-3}$, le Nusselt tend asymptotiquement vers une valeur limite indépendante des paramètres anisotropes du milieu poreux, $Nu \approx 8$. Cet résultat est identique à celui obtenu par le passé par Hooman et Ejlali [14] en étudiant le transfert de chaleur en milieu poreux isotrope confiné dans un canal cylindrique chauffé isothermiquement sur la paroi.

Dans le cas d'un milieu fluide pur ($Da \rightarrow \infty$), le taux de transfert de chaleur prédit (équation (23)) la valeur $Nu=48/5$ qui s'apparente à celle obtenue par Hooman et Ejlali [14] dans les mêmes situations physiques.

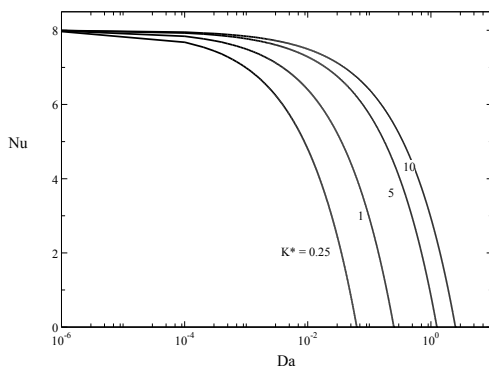


Figure 4.: Effet du nombre de Darcy Da sur le Nusselt lorsque $\varphi=0^\circ$ pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* .

Les effets de l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité du milieu poreux sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie en perméabilité K^* sont présentés à la Figure 5.

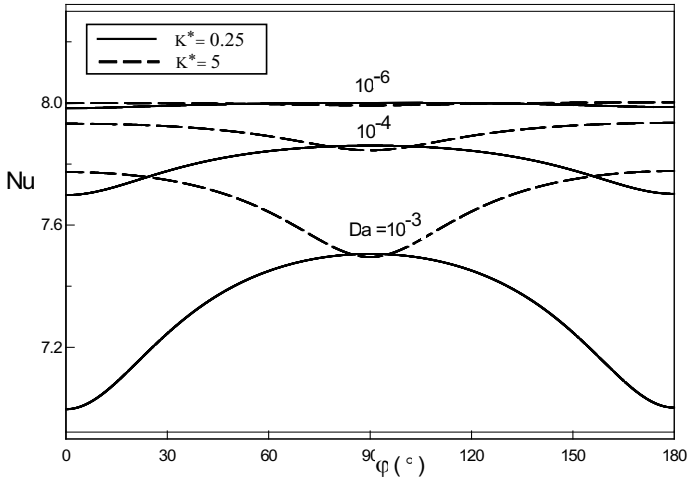


Figure 5.: Effet de l'angle d'orientation φ des axes de perméabilité sur le Nusselt pour $K^*=0.25$ et $K^*=5$.

Les résultats obtenus indiquent que le taux de transfert de chaleur est grandement influencé par l'angle d'orientation des axes principaux de perméabilité. Pour $K^*=0.25$ le transfert de chaleur par convection est maximal lorsque $\varphi=90^\circ$, c'est-à-dire lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle au champ gravitationnel. Par contre le transfert de chaleur par convection est minimal lorsque $\varphi=0^\circ$ et $\varphi=180^\circ$, ce qui correspond à la situation où l'axe principal du milieu poreux ayant la perméabilité la moins élevée est parallèle au champ gravitationnel. La situation inverse est observée lorsque $K^*=5$. Dans ce cas, le transfert de chaleur est maximal lorsque $\varphi=0^\circ$ et $\varphi=180^\circ$, et minimal pour $\varphi=90^\circ$. Cette situation peut être démontrée par le fait que, en prenant la dérivée première de Nu (équation (28)), par rapport à φ et en la posant égale à zéro, on obtient l'équation :

$(1-K^*)\sin 2\varphi=0$ qui donne les différentes valeurs de φ définissant les extrema du taux de transfert de chaleur. Il ressort de ces résultats qu'un transfert maximal (minimal) de chaleur est atteint lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Des résultats similai-

res ont été rapportés par Zhang [10], Degan et coll. [11], Akowanou et coll. [12] lorsqu'ils ont étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert de chaleur par convection dans une couche poreuse verticale chauffée par le côté confinant un milieu poreux dont les axes de perméabilité sont orientés arbitrairement.

Pour des nombres de Darcy assez faibles (Da de l'ordre de 10^{-6}), le taux de transfert de chaleur tend asymptotiquement vers une limite indépendante de φ ($Nu \approx 8$).

CONCLUSIONS

Dans cette étude, les effets des paramètres anisotropes du milieu poreux sur l'écoulement convectif forcé d'un fluide visqueux à travers un milieu poreux confiné dans un canal cylindrique ont été examinés. Le canal cylindrique est chauffé isothermiquement et à température constante sur sa paroi latérale. La matrice du milieu poreux est anisotrope en perméabilité dont les axes principaux sont orientés arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Sur la base de l'hypothèse de l'écoulement complètement développé, le taux de transfert de chaleur, les champs de vitesse et de température ont été exprimés en fonction des principaux paramètres adimensionnels hydrodynamiques et thermiques. Des cas limites relatives à des situations physiques particulières sont développés. De l'analyse des résultats dans le cas des milieux à porosités faibles, il se dégage les conclusions suivantes :

- 1) L'écoulement convectif dans le milieu poreux est considérablement affecté par les paramètres d'anisotropie K^* que sont le rapport d'anisotropie et l'angle d'orientation φ des axes principaux de perméabilité.
- 2) Lorsque le nombre de Darcy tend vers zéro ($Da \rightarrow 0$), milieux à faibles porosités), $\zeta \rightarrow \infty$. Dans ce cas, le champ d'écoulement est un milieu de Darcy pur fortement anisotrope en perméabilité, milieu pour lequel les effets d'anisotropie sont prédominants. La vitesse de l'écoulement et la température du fluide croissent pour atteindre leur maximum sur l'axe du canal lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité est inférieure à l'unité ($K^* < 1$) pour des axes principaux de perméabilité coïncidant avec les axes de coordonnées ($\varphi = 0^\circ$). Lorsque $Da \rightarrow \infty$ (milieu à porosités élevées), $\zeta \rightarrow 0$. Cette situation approche celle d'un milieu fluide pur pour lequel les effets d'anisotropie du milieu poreux sont

sans impact sur l'écoulement thermo-convectif qui reste dépendant des effets de viscosité.

- 3) Le transfert de chaleur à travers le milieu poreux est maximal (minimal) lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus élevée est orienté parallèlement (perpendiculairement) au champ gravitationnel.

REFERENCES

1. J. KOH, R. COLONY, 1974.- "Analysis of cooling effectiveness of porous material in a coolant passage." *J. Heat Transfer Vol. 96*, pp. 324-330.
2. J. KOH, Y., R. STEVEN, 1975.- "Enhancement of cooling effectiveness by porous materials in coolant passages" *J. Heat Transfer*, Vol. 97, pp. 309-311.
3. M. Kaviany, 1985.- "Laminar flow through a porous channel bounded by isothermal parallel plates." *J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, pp. 851-858.
4. A. Haji-Sheikh, K. Vafai, 2004.- "Analysis of flow and heat transfer in porous media imbedded inside various-shaped ducts." *J. Heat Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 1889-1905.
5. K. Hooman, H. Gurgenci, 2007.- "Effects of viscous dissipation and boundary conditions on forced convection in a channel occupied by a saturated porous medium." *Trans. Porous Media*, Vol. 68, pp. 301-319.
6. T. Shigeru, I. Koichi, 2007.- "Analysis of laminar dissipative flow and heat transfer in a saturated circular tube with constant wall heat flux." *Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 50*, pp. 2406-2413.
7. K. Hooman, A. Ranjbar-Kani, 2004.- "A perturbation based analysis to investigate forced convection in a porous saturated tube", *J. Comp. And Appl. Math. Vol. 162*, pp. 411-419.
8. K. Hooman, A. Ranjbar-Kani, 2003.- "Forced convection in a fluid-saturated porous medium tube with isoflux wall." *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 1015-1026.
9. R. Vasantha, G. Nath, 1987.- "Forced convection along a longitudinal

- cylinder embedded in saturated porous layer”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 639-646.
10. X. Zhang, 1993.- “Convective heat transfer in a vertical porous layer with anisotropic permeability”, *Proc. 14th Canad. Congr. Appl. Vol. 2*, pp. 579-580.
 11. G. Degan, P. Vasseur, E. Bilgen, 1995.- “Convective heat transfer in a vertical anisotropic porous layer”, *Int. J. Heat and Mass Transfer*; Vol. 38, pp. 1975-1987.
 12. C. Akowanou, G. Degan, 2007.- “Transfert convectif dans les cavités poreuses soumises à un champ magnétique transversal”, *J. Rech. Sci. Univ. Lomé (Togo), série E, Vol. 8(1)*, pp. 53-61.
 13. G. Degan, S. Zohoun, P. Vasseur, 2002.- “Forced convection in horizontal porous channels with hydrodynamic anisotropy”, *Int. J. Heat and Mass Transfer* Vol. 45, pp. 3181-3188.
 14. K. Hooman, A. Ejlali, 2007.- “Entropy generation in forced convection in a porous saturated circular tube with uniform wall temperature”, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer* Vol. 34, pp. 408-419.

15. NOMENCLATURE

- a,c constante, équation (10)
- C_p chaleur spécifique du fluide à pression constante
- \vec{g} accélération gravitationnelle
- k conductivité thermique
- \bar{K} tenseur de la perméabilité, équation (5)
- K₁,K₂ perméabilités suivant les axes principaux
- K* rapport d’anisotropie en perméabilité
- Da nombre de Darcy, équation (13)

- B_r nombre de Brinkman, équation(15)
- B_r^* nombre de Brinkman, équation(26)
- N_s taux adimensionnel d'entropie générée
- N échelle caractéristique de température, $((T_0 - T_w)/T_w)$
- ΔT différence de température, $T_0 - T_w$
- Pe nombre de Peclet, $(\rho c_p)_f RU/k$
- T température
- p' pression
- \vec{V} vitesse de filtration du fluide
- \hat{u} forme réduite de la vitesse d'écoulement
- (x', r') système de coordonnées cylindriques
- u', v' composantes de la vitesse dans les directions x' et r'
- R rayon du canal cylindrique

Lettres grecques

- ς constante, équation (13)
- μ viscosité dynamique du fluide
- λ viscosité relative, μ_{eff}/μ
- φ angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité

θ profile de température adimensionnelle

ϕ fonction de dissipation visqueuse

ρ densité du fluide

$(\rho c_p)_f$ capacité calorifique du fluide

Exposant

' relatif aux quantités dimensionnelles

Indices

o relatif à l'entrée du canal

w relatif à la surface interne de la paroi

