

# Volume of geodesic spheres in manifolds of hyperbolic type

Carlos OGOUYANDJOU

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum, Germany  
E-mail: ogouyand@math.ruhr-uni-bochum.de

(Reçu le 27 juin 1999, accepté le 5 juillet 1999)

---

**Abstract.** Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold of hyperbolic type without conjugate points and  $X$  be its universal Riemannian covering. We show that the growth function of the volume of geodesic spheres of  $X$  is of purely exponential type. This result yields a sufficient condition for the non-existence of a Riemannian metric with strictly negative curvature on compact manifolds. © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Volume d'une sphère géodésique dans une variété de type hyperbolique*

**Résumé.** Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de type hyperbolique sans points conjugués et  $X$  son revêtement universel. On montre dans cette Note que le volume des sphères géodésiques de  $X$  est de croissance exponentielle pure. Ce résultat nous permet d'obtenir une condition suffisante pour la non-existence d'une métrique riemannienne à courbure strictement négative sur une variété compacte. © 1999 Académie des Sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## *Version française abrégée*

Une variété riemannienne compacte  $(M, g)$  est de type hyperbolique s'il existe une autre métrique riemannienne  $g_0$  sur  $M$  telle que  $(M, g_0)$  soit à courbure strictement négative. Toute surface compacte orientable est un espace de type hyperbolique si et seulement si son genre est  $\geq 2$  (voir [13] ou [14]).

Les variétés de type hyperbolique sont des exemples d'espace hyperbolique au sens de Gromov (voir [1], [4], [9] ou [11]).

Un espace métrique  $(X, d)$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov s'il existe un réel  $\delta \geq 0$  tel que  $(x \cdot y)_{x_0} \geq \min [(x \cdot z)_{x_0}, (y \cdot z)_{x_0}] - \delta$  pour tous  $x, y, z$  éléments de  $X$  et pour tout point de référence  $x_0$ , où  $(x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2} [d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)]$  désigne le produit de Gromov de deux points  $x$  et  $y$  de  $X$ .

---

Note présentée par Marcel BERGER.

C. Ogouyandjou

On désignera par  $X^G(\infty)$  le bord au sens de Gromov de l'espace hyperbolique  $X$  (voir section 1).

Soient ensuite  $(X, d)$  un espace métrique et  $\Gamma$  un sous-groupe discret et infini du groupe des isométries  $\text{Iso}(X)$  de  $X$ . Pour  $x_0, x \in X$  et  $s \in \mathbb{R}$  notons  $P_s(x, x_0)$  la série de Poincaré associée à  $\Gamma$  (voir section 2). Le nombre  $\alpha := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid P_s(x, x_0) < \infty\}$  est appelé exposant critique de  $\Gamma$ . Pour  $s > \alpha$  et  $x \in X$ , considérons la mesure

$$\mu_{s, x_0, x} := \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x_0)} \delta_{x_0}}{P_s(x_0, x_0)}$$

et la limite faible  $\mu_x := \lim_{s_n \rightarrow \alpha} \mu_{s_n, x_0, x}$ .  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  est la densité de Patterson–Sullivan associée à  $\Gamma$  (voir [15]).

Soient  $X$  une variété hyperbolique au sens de Gromov,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\Gamma$  un sous-groupe discret et infini de  $\text{Iso}(X)$ . Une quasi-densité de Busemann de dimension  $\alpha$  est une famille  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  de mesures de Borel finies non triviales définies sur  $X \cup X^G(\infty)$  telles que :

1.  $\text{supp } \mu_x \subset \Lambda(\Gamma, x)$ , où  $\Lambda(\Gamma, x)$  est l'ensemble limite de l'orbite  $\Gamma x$  dans  $X^G(\infty)$  ;
2.  $\mu_{\gamma x}(\gamma A) = \mu_x(A)$  pour tous  $\gamma \in \Gamma, A \subset X^G(\infty), A$  mesurable,  $x \in X$  ;
3. il existe  $\lambda \geq 1$  tel que, pour tous  $x, y \in X$ ,

$$\lambda^{-1} e^{-\alpha b_c(y)} \leq \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) \leq \lambda e^{-\alpha b_c(y)}$$

pour presque tout  $\xi \in X^G(\infty)$ , où  $c$  est une géodésique vérifiant  $c(0) = x, c(\infty) = \xi$ , et  $b_c(y) := \lim_{t \rightarrow +\infty} d(c(t), y) - t$  est la fonction de Busemann pour la géodésique  $c$ .

Dans la suite du travail,  $(M, g)$  désigne une variété riemannienne compacte de type hyperbolique,  $X$  son revêtement universel muni de la métrique induite. Soit  $\Gamma$  le groupe des transformations de Deck et  $\alpha^g$  son exposant critique. En utilisant le lemme 2.2 de [5] et la proposition 3.6 de [15], nous prouvons le lemme suivant :

LEMME 1. – *La densité de Patterson–Sullivan associée à  $\Gamma$  sur  $X \cup X^G(\infty)$  est une quasi-densité de Busemann de dimension  $\alpha^g$ .*

Pour chaque  $y \in X \cup X^G(\infty), x \in X$  et  $\rho \geq 0$ , définissons l'ombre de la boule  $B_g(x, \rho)$  vue du point  $y$ , comme l'ensemble  $\mathcal{O}_y^g(x, \rho)$  des points  $\xi \in X^G(\infty)$  tels que tout rayon géodésique  $c_{y\xi}$  reliant  $y$  et  $\xi$  vérifie  $c_{y\xi} \cap B_g(x, \rho) \neq \emptyset$ . On a le lemme suivant :

LEMME 2 (lemme de l'ombre). – *Soit  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  la densité de Patterson–Sullivan associée à  $\Gamma$ . Alors il existe une constante  $R_1 > 0$  et une fonction  $b \geq 1$  telles que, pour tout  $\rho \geq R_1$  et tout  $x \in X$  on ait :*

$$\frac{1}{b(\rho)} e^{-\alpha^g d(x, x_0)} \leq \mu_{x_0}(\mathcal{O}_{x_0}^g(x, \rho)) \leq b(\rho) e^{-\alpha^g d(x, x_0)}.$$

Le théorème suivant est le résultat important de notre travail :

THÉORÈME 1. – *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de type hyperbolique et sans points conjugués. Soit  $X$  son revêtement universel muni de la métrique induite par celle de  $M, S(x_0, r)$  la sphère géodésique de centre  $x_0 \in X$  et de rayon  $r$  et  $h_g$  l'entropie volumique de  $M$ . Alors il existe des constantes  $a \geq 1$  et  $r_0 > 0$  telles que :*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\text{vol } S(x_0, r)}{e^{h_g r}} \leq a \text{ pour tout } r \geq r_0.$$

### 1. Preliminaries

A compact Riemannian manifold  $(M, g)$  is called of hyperbolic type if there exists an another Riemannian metric  $g_0$  such that  $(M, g_0)$  has strictly negative curvature. If  $\dim M = 2$  and  $M$  orientable, then hyperbolic type is the same as genus  $\geq 2$  (see [13] or [14]).

The manifolds of hyperbolic type are examples of Gromov hyperbolic manifolds (see [1], [4], [9] or [11]).

Let  $\delta \geq 0$ . A metric space  $(X, d)$  is said to be a  $\delta$ -hyperbolic space if

$$(x \cdot y)_{x_0} \geq \min [(x \cdot z)_{x_0}, (y \cdot z)_{x_0}] - \delta$$

for all  $x, y, z$  and every choice of reference point  $x_0$ , where

$$(x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2} [d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)]$$

denotes de Gromov-product of two points  $x$  and  $y$  of  $X$ . We call  $X$  Gromov-hyperbolic space if it is  $\delta$ -hyperbolic for some  $\delta \geq 0$ .

Now let  $X$  be a Gromov hyperbolic manifold. We say that the sequence  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of points in  $X$  converges at infinity if  $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_{x_0} = \infty$ . We define the following equivalence relation  $\mathcal{R}$  on the set of sequences of points in  $X$  that converge at infinity:

$$(x_i) \mathcal{R} (y_j) \iff \lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_{x_0} = \infty.$$

The Gromov boundary  $X^G(\infty)$  of  $X$  is the set of equivalence classes of sequences that converge at infinity. There is a natural topology on the set  $X \cup X^G(\infty)$  such that  $X$  is dense in  $X \cup X^G(\infty)$  and  $X \cup X^G(\infty)$  is compact. Each geodesic  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$  defines two distinct points  $\gamma(+\infty)$  and  $\gamma(-\infty)$ . For each  $(\eta, x) \in X^G(\infty) \times X$ , there exists a geodesic ray  $\gamma$  such that  $\gamma(0) = x$  and  $\gamma(+\infty) = \eta$ . For any other geodesic ray  $\gamma'$  with  $\gamma'(0) = \gamma(0) = x$  and  $\gamma'(+\infty) = \gamma(+\infty) = \eta$ , we have

$$d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq 4\delta \text{ for all } t \geq 0.$$

Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold of hyperbolic type,  $X$  be its universal Riemannian covering. Let  $g_0$  denote an associated metric of strictly negative curvature on  $M$ . The universal Riemannian covering  $X_0$  of  $(M, g_0)$  is a Hadamard manifold satisfying  $K_{X_0} \leq -k_0^2 < 0$  for some constant  $k_0 > 0$ . Hence  $X_0$  and  $X$  are Gromov hyperbolic spaces. Moreover,

$$X^G(\infty) \simeq X_0^G(\infty) \simeq X_0(\infty),$$

where  $X_0(\infty)$  is the ideal boundary of a Hadamard manifold  $X_0$  (see [7] for the definition of ideal boundary).

### 2. Busemann quasi-densities

Let  $(X, d)$  be a metric space and  $\Gamma$  be a discrete and infinite subgroup of the isometry group  $\text{Iso}(X)$  of  $X$ . For  $x_0, x \in X$  and  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$P_s(x, x_0) := \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x_0)}$$

C. Ogouyandjou

denotes the Poincaré series associated to  $\Gamma$ . The number  $\alpha := \inf \{s \in \mathbb{R} \mid P_s(x, x_0) < \infty\}$  is called the critical exponent of  $\Gamma$  and is independent of  $x$  and  $x_0$ . For  $s > \alpha$  and  $x \in X$ , we consider the measure

$$\mu_{s, x_0, x} := \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x, \gamma x_0)} \delta_{x_0}}{P_s(x_0, x_0)}$$

and a weak limit  $\mu_x := \lim_{s_n \rightarrow \alpha} \mu_{s_n, x_0, x}$ .  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  is called the Patterson–Sullivan density associated to  $\Gamma$  (see [15]).

Let  $X$  be a Gromov hyperbolic manifold,  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\Gamma$  a discrete and infinite subgroup of  $\text{Iso}(X)$ . Let  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  be a family of finite nontrivial Borel measures on  $X \cup X^G(\infty)$ . We will say that  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  is an  $\alpha$ -dimensional Busemann quasi-density if:

1.  $\text{supp } \mu_x \subset \Lambda(\Gamma, x)$ , where  $\Lambda(\Gamma, x)$  is the limit set of the orbit  $\Gamma x$  in  $X^G(\infty)$ ;
2.  $\mu_{\gamma x}(\gamma A) = \mu_x(A)$  for all  $\gamma \in \Gamma$ ,  $A \subset X^G(\infty)$ ,  $A$  measurable,  $x \in X$ ;
3. there exists  $\lambda \geq 1$  such that, for all  $x, y \in X$ ,

$$\lambda^{-1} e^{-\alpha b_c(y)} \leq \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) \leq \lambda e^{-\alpha b_c(y)}$$

for almost all  $\xi \in X^G(\infty)$ , where  $c$  is a geodesic satisfying  $c(0) = x$ ,  $c(\infty) = \xi$ , and  $b_c(y) := \lim_{t \rightarrow +\infty} d(c(t), y) - t$  is the Busemann function for the geodesic  $c$ .

For the rest of this Note let  $(M, g)$  denote a compact manifold of hyperbolic type,  $X$  be its universal Riemannian covering. Let  $\Gamma$  be the group of Deck transformations and  $\alpha^g$  be its critical exponent. Using Lemma 2.2 of [5] and Proposition 3.6 of [15], we show the following lemma:

LEMMA 2.1. – *The Patterson–Sullivan density associated to  $\Gamma$  on  $X \cup X^G(\infty)$  is an  $\alpha^g$ -dimensional Busemann quasi-density.*

For given  $y \in X \cup X^G(\infty)$ ,  $x \in X$  and  $\rho \geq 0$ , we introduce the shadow  $\mathcal{O}_y^g(x, \rho)$  (of the ball  $B_g(x, \rho)$  viewed from the point  $y$ ) as follows:  $\mathcal{O}_y^g(x, \rho)$  consists of all points  $\xi \in X^G(\infty)$  such that all geodesic rays  $c_{y\xi}$  connecting  $y$  and  $\xi$  satisfy  $c_{y\xi} \cap B_g(x, \rho) \neq \emptyset$ .

LEMMA 2.2 (shadow lemma). – *Let  $\{\mu_x\}_{x \in X}$  be the Patterson–Sullivan density associated to  $\Gamma$ . Then there exists a constant  $R_1 > 0$  and a function  $b \geq 1$  such that for all  $\rho \geq R_1$  and all  $x \in X$ :*

$$\frac{1}{b(\rho)} e^{-\alpha^g d(x, x_0)} \leq \mu_{x_0}(\mathcal{O}_{x_0}^g(x, \rho)) \leq b(\rho) e^{-\alpha^g d(x, x_0)}.$$

### 3. The growth rate of the volume of spheres in manifolds of hyperbolic type

THEOREM 3.1. – *Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold of hyperbolic type without conjugate points and  $X$  be its universal Riemannian covering. Let  $S(x_0, r)$  be the geodesic sphere about  $x_0 \in X$  of radius  $r$ , and  $h_g$  be the volume entropy of  $(M, g)$ . Then there exists constants  $a \geq 1$  and  $r_0 > 0$  such that:*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{\text{vol } S(x_0, r)}{e^{h_g r}} \leq a \text{ for all } r \geq r_0.$$

That is, the growth function of the volume of the geodesic sphere  $S(x_0, r)$  is of purely exponential type.

Remark 3.1. – In 1969 Margulis proved, for a suitable constant  $h > 0$ , the existence of  $a(p) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } S(p, r)}{e^{hr}}$  at each point  $p$  in manifolds of strictly negative curvature, and that the function

$a : M \rightarrow \mathbf{R}$  is continuous (see [16]). Clearly, this result implies purely exponential volume growth of geodesic spheres. Knieper showed an analogue of Theorem 3.1 for manifolds with a rank 1 metric of nonpositive curvature (see [15]). Note that the manifolds considered in Theorem 3.1 may have curvature of both signs (see [6]).

The following lemmas will be useful for the proof of Theorem 3.1. They can be derived by similar arguments like those given in [3].

LEMMA 3.1. - Let  $(M, g)$  be a compact manifold without conjugate points,  $X$  be its universal Riemannian covering and  $n = \dim X$ . Let  $S(x_0, r)$  be the geodesic sphere of radius  $r$  about  $x_0 \in X$ . Then, for all  $\rho \leq \frac{1}{2}r$ , there exists a constant  $\ell_1(\rho) > 0$  such that all  $(n - 1)$ -dimensional subdomains  $B$  in  $S(x_0, r)$  with  $\text{diam } B = \rho$  satisfy  $\text{vol}_{n-1}(B) \leq \ell_1(\rho)$ .

Let  $B(x_0, r)$  be the open geodesic ball about a point  $x_0$  of radius  $r$ . For  $x, y \in X \setminus B(x_0, r)$  we define:

$$d_r(x, y) = \inf \{ \ell(\sigma) \mid \sigma \text{ is a piecewise smooth curve connecting } x \text{ and } y \text{ and } \sigma \subset X \setminus B(x_0, r) \}.$$

For  $x \in S(x_0, r)$  let  $B_\rho^r(x) := \{ y \in S(x_0, r) \mid d_r(x, y) < \rho \}$ .

LEMMA 3.2. - Let  $(M, g)$  be a compact manifold without conjugate points,  $X$  be its universal Riemannian covering and  $n = \dim X$ . Suppose that  $X$  is a  $\delta$ -hyperbolic manifold. Then there exists a constant  $K > 0$ , such that for all  $\rho \geq K$  and  $r \geq 2\rho$ , there exists a constant  $\ell_2(\rho) > 0$  with  $\text{vol}_{n-1}(B_\rho^r(x)) \geq \ell_2(\rho)$  for all  $x \in S(x_0, r)$ .

Proof of Theorem 3.1. - Choose  $\rho = \max\{6R_1, 3K, 13\delta\}$ , where  $R_1$  is as in Lemma 2.2,  $K$  is as in Lemma 3.2 and  $\delta > 0$  such that  $X$  is a  $\delta$ -hyperbolic space. Let  $x_1, \dots, x_m$  be a maximal  $\rho$ -separating set in  $S(x_0, r)$ . Then

$$X^G(\infty) = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{O}_{x_0}^g(x_i, \rho + 4\delta).$$

Since  $\rho \geq 6R_1$ , Lemma 2.2 implies the existence of a constant  $b(\rho + 4\delta)$  with  $m \geq \frac{b_0 e^{\alpha^g r}}{b(\rho + 4\delta)}$ , where  $b_0 = \mu_{x_0}(X(\infty))$  and  $\alpha^g$  is the critical exponent of the group of Deck transformations. Note that the balls  $B_{\frac{\rho}{3}}^r(x_i)$  are pairwise disjoint subsets of  $S(x_0, r)$ . Using Lemma 3.2 and  $\rho \geq 3K$ , we conclude that there exists a constant  $\ell_2(\frac{\rho}{3}) > 0$  with

$$\text{vol } S(x_0, r) \geq \frac{b_0 \ell_2(\frac{\rho}{3})}{b(\rho + 4\delta)} e^{\alpha^g r} \text{ for all } r \geq \frac{2\rho}{3}.$$

Furthermore, Lemma 3.1 implies the existence of a constant  $\ell_1(\rho) > 0$  with  $\text{vol } S(x_0, r) \leq m \ell_1(\rho)$  for all  $r \geq 2\rho$ . Since  $\rho \geq 13\delta$ , the shadows  $\mathcal{O}_{x_0}^g(x_i, \frac{\rho}{6})$  are pairwise disjoint subsets of  $X^G(\infty)$ . Because of  $\rho \geq 6R_1$  Lemma 2.2 implies that there exists a constant  $b(\frac{\rho}{6})$  with  $b_0 \geq \frac{m}{b(\frac{\rho}{6}) e^{\alpha^g r}}$ .

Finally, since  $\text{vol } B(x_0, r) = \int_0^r \text{vol } S(x_0, t) dt$ , there exist constants  $a_1 \geq 1$  and  $r_1 > 0$ , such that

$$\frac{1}{a_1} \leq \frac{\text{vol } B(x_0, r)}{e^{\alpha^g r}} \leq a_1 \text{ for all } r \geq r_1.$$

Hence  $\alpha^g = h_g$ . □

## C. Ogouyandjou

**COROLLARY 3.1.** – *Let  $(M, g)$  be a compact orientable surface of genus  $\geq 2$ , without conjugate points and  $X$  be its universal Riemannian covering. Then the growth function of the volume of geodesic spheres of  $X$  is of purely exponential type.*

**Acknowledgements.** I am grateful to Professors G. Knieper and N. Peyerimhoff for their help and many useful discussions while preparing this note. I am also especially indebted to Professor J.-P. Ezin for his advise and suggestions.

## References

- [1] Ancona A., Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés, in: A. Ancona et al. (Eds.), *Potential Theory, Surveys and Problems*, Lect. Notes in Math. 1344, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Cannon J.W., Theory of negatively curved spaces and groups, in: T. Bedford, M. Keane, C. Series, *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic spaces*, Oxford University Press, 1991, pp. 315–369.
- [3] Cao J., Cheeger isoperimetric constants of Gromov-hyperbolic spaces and applications, Preprint.
- [4] Coornaert M., Delzant T., Papadopoulos A., *Géométrie et théorie des groupes*, Lect. Notes in Math. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] Coornaert M., Mesures de Patterson–Sullivan sur le bord d’un espace hyperbolique au sens de Gromov, *Pacific J. Math.* 159 (2) (1993) 241–270.
- [6] Eberlein P., Geodesic flow in certain manifolds without conjugate points, *Transac. Amer. Math. Soc.* 167 (19??) 151–170.
- [7] Eberlein P., O’Neill B., Visibility manifolds, *Pacific J. Math.* 46 (1973) 45–109.
- [8] Eschenburg J.H., Stabilitätsverhalten des Geodätischen Flusses Riemannscher Mannigfaltigkeiten, *Bonner Math. Schriften* 87 (1976).
- [9] Ghys É., de la Harpe P., *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, *Progress in Math.* 83, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [10] Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 1987.
- [11] Gromov M., Hyperbolic groups, in: *Essays in group theory*, S. Gersten (Ed.), Springer-Verlag, 1987.
- [12] Grove K., Metric differential geometry, in: *Differential geometry*, V.L. Hansen (Ed.), *Proceedings, Lyngby 1985*, Lect. Notes in Math. 1263, Springer-Verlag, 1987.
- [13] Klingenberg W., Geodätischer Fluss auf Mannigfaltigkeiten vom hyperbolischen Typ, *Invent. Math.* 14 (1971) 63–82.
- [14] Klingenberg W., *Riemannian geometry*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1982.
- [15] Knieper G., On the asymptotic geometry of nonpositively curved manifolds, *GAFA* 7 (1997) 755–782.
- [16] Margulis M.A., Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, *Funct. Anal. Appl.* 3 (1969) 335–336.