Utilité des nombres dans l'introduction de la notion de vecteur en classe de 4^e

Gervais Affognon

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin

gervais.affognon@imsp-uac.org

Carlos Ogouyandjou

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin

Joël Tossa

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin

Résumé :

Par un choix mathématique inspiré de l'histoire des mathématiques, nous avons montré l'utilité des nombres dans l'introduction du vecteur en classe de 4^eétant entendu que les nombres ont joué un rôle important dans la construction du concept. Pour atteindre cet objectif, les nombres ont été utilisés comme une variable cognitive.

Mots clés :

vecteur géométrique, histoire des vecteurs, variable cognitive, ingénierie didactique

Abstract :

By a mathematical choice inspired by the history of the mathematics, we showed the utility of the numbers in the introduction of the vector in 3^{rd} form being heard that the numbers played an important role in the construction of the concept. To reach this objective, the numbers were used as a cognitive variable.

Keywords:

geometrical vector, history of vectors, cognitive variable, didactic engineering

1- Introduction

La construction d'un concept mathématique compte deux grandes phases : une phase d'action et une phase de représentation mentale (BERDONNEAU, 2006). L'histoire des concepts mathématiques montre que leurs constructions ont été des occasions pour surmonter des difficultés et des controverses liées aux connaissances du moment.

Les difficultés que les élèves présentent au cours de l'apprentissage d'un concept, sont semblables aux difficultés rencontrées au moment de sa construction (DE HOSSON 2004). Les recherches ont montré que l'utilisation de l'histoire des concepts dans l'enseignement de ces derniers pourrait réduire les difficultés de leur apprentissage.

En 1993, dans un article intitulé *Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire* TOURNES a montré que l'histoire des mathématiques pourrait permettre aux élèves de mieux maitriser les concepts enseignés et aux enseignants de changer la représentation qu'ils se font de leur discipline et obtenir une meilleure attention et une meilleure motivation des élèves.

En 2000, CHARBONNEAU avec un groupe de travail dans un article intitulé *Place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques* ont mené

des réflexions autour de la question : quelles sont les conditions à respecter pour assurer un effet réel de l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques ? Les participants avaient identifié les effets sur deux grandes catégories de motivations. Il s'agit des motivations d'ordre pédagogique et des motivations ayant rapport avec l'image des mathématiques.
Au delà des motivations, quels effets l'utilisation de l'histoire des mathématiques a sur le processus cognitif des élèves ? C'est la finalité de nos préoccupations.
Le but de ce travail est l'utilisation d'une approche didactique qui s'inspire de l'histoire des vecteurs pour son introduction en de classe de 4^{e}. Le choix mathématique est de ne pas utiliser la translation pour introduire la notion de vecteur mais de rester dans le cadre historique de la construction de la notion. Les cadres graphique et algébrique sont ceux utilisés dans cette expérience. Les techniques exigibles sont : dans le cadre graphique, savoir tracer une droite, prendre le milieu d'un segment et savoir lire un parallélogramme par la succession des sommets ; dans le cadre algébrique, savoir écrire une égalité algébrique à partir d'une figure.
Dans cet article, nous avons montré l'utilité des nombres dans l'introduction du vecteur en classe de 4^{e}étant entendu que les nombres ont joué un rôle important dans la construction du concept.
Le concept vecteur peut être :

- physique (segment orienté) et utilisé en physique ;
- géométrique (classe d'équivalence de la relation d'équipollence) et utilisé en géométrie ;
- algébrique (élément d'un espace vectoriel) modélisation du vecteur géométrique et utilisé en algèbre.

Le vecteur géométrique, création didactique pour combler le manque qu'il y a entre le vecteur physique et le vecteur algébrique (DORIER 2000) est un objet d'enseignement dans le secondaire.
Il est introduit dans le cours de géométrie en classe de 4^{e} au Bénin (et dans d'autres pays de l'Afrique) par l'utilisation de la translation. Cette façon de procéder a pour objectif de faire découvrir à l'élève de façon intuitive la direction, le sens et la longueur (CIAM[1], 4^{e}, 2004, p. 68). Suivent ensuite l'égalité, quelques configurations et la somme.
Cette approche didactique privilégie le cadre graphique, dresse des obstacles (épistémologiques et didactiques) tels que le passage aux opérations avec les objets à trois caractéristiques et donne naissance aux erreurs telles que la perception du vecteur comme un ensemble de points.
En aménageant le cadre didactique par un choix mathématique judicieux, ne créerait-on pas des conditions d'apprentissage semblables aux conditions de naissance des vecteurs ?
Dans cette entreprise, les nombres ne constituent-ils pas une ''variable cognitive[2]'' ? (BROUSSEAU ,1997)
Ainsi dans notre choix mathématique, nous avons en un premier temps passé les nombres sous silence avant de les intégrer par la suite.

[1] CIAM : Collection Inter Africaine de Mathématiques.
[2] « Une variable cognitive est une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale » (BROUSSEAU, 1997).

2- Cadre théorique

Pour mesurer l'impact de l'action didactique envisagée, nous avons utilisé le cadre théorique de l'ingénierie didactique pour l'élaboration et l'analyse de la séquence. Ainsi, nous avons dans une phase préliminaire fait une analyse cognitive, une analyse épistémologique et une analyse pédagogique, fait une analyse à priori, procédé à une expérimentation et enfin fait une analyse à postériori. La théorie anthropologique du didactique a été utilisée pour la structuration globale des tâches et la théorie des situations didactiques pour suivre les séquences de classes.
Selon la théorie anthropologique du didactique de CHEVALLARD (1991), nous avons : le type de tâches proposé aux élèves (caractérisation du sens et de la direction d'un vecteur), la technique à utiliser (observation et constructions géométriques), la technologie qui encadre la technique (définition et propriétés du parallélogramme) et la théorie (les configurations du plan). Ainsi pour construire le concept de vecteur les élèves doivent connaître les résultats au programme, élaborer des stratégies, argumenter, réaliser et communiquer. L'organisation des activités suivra les dispositions du tableau 1 suivant.

Connaître les résultats au programme	Elaborer une stratégie	Argumenter	Réaliser	Communiquer
Activité 5.1.3	Activité 5.1	Activité 5.1.2	Activité 5.1.3	Au cours de la plénière
Activité 5.2	Activité 5.1.3	Activité 5.1.3	Activité 5.3	

Tableau 1

L'activité a été divisée en cinq parties à savoir : partie 1 (activité 5.1.1), partie 2 (activité 5.1.2), partie 3 (activité 5.1.3), partie 4 (activité 5.2), partie 5 (activité 5.3).

La partie 1 a été remise aux élèves pour un travail individuel (phase de dévolution) il y a eu ensuite un travail collectif au cours duquel le professeur a donné la parole aux élèves pour exposer leurs productions puis il leur a apporté une première information (phase d'institutionnalisation).
Les parties 2 puis 3 ont été remises puis le professeur a donné une deuxième information. Enfin la partie 4 a été administrée puis le professeur a donné une troisième information.

3- Phase préliminaire

3.1- **Analyse cognitive** (Difficultés des élèves à propos du vecteur)

Les élèves jusqu'en classe de 4^e sont habitués aux nombres. Quand un élève place deux points dans le plan, il sait tracer le segment de droite qui joint ces deux points et déterminer sa longueur.
Le segment de droite est une portion de droite limitée par deux points c'est-à-dire un ensemble de points alignés qui a deux extrémités et une longueur (nombre positif). Le vecteur géométrique est un ensemble infini de couples de points (bipoints) équipollents[3] qu'on ne peut pas « dessiner » et dont on ne peut dessiner qu'un représentant. De segment de droite à bipoints ou encore d'ensemble de points à ensemble de bipoints l'élève a des efforts à fournir. D'un objet qui n'a

[3] Deux couples (A, B) et (C, D) sont équipollents si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu autrement le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

qu'une seule caractéristique et manipulable à l'aide des quatre opérations élémentaires ($+, -, \times, \div$) on passe à un objet qui a trois caractéristiques et possédant d'autres règles de calcul.
La façon de représenter le vecteur et son représentant crée une confusion parce que par abus de langage le représentant d'un vecteur est aussi appelé vecteur. La matérialisation précoce du représentant d'un vecteur à l'aide d'un segment orienté donne l'impression aux élèves que le vecteur est un ensemble de points. La confusion entre le vecteur et ses représentants en ajoute aux difficultés des élèves. Il y a aussi la réduction du vecteur à sa norme et la confusion entre direction et sens (LÊ THI H. C., 1997).
On sait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles au moyen des sens mais seulement à travers des représentations sémiotiques (HITT, 2004) et que la compréhension d'un concept n'intervient qu'avec la coordination d'au moins deux registres de représentation sémiotique. Il a été montré qu'il existe quatre types de représentations sémiotiques dans le cas des vecteurs (BITTAR, 1998).[4]

3.2- Analyse épistémologique (et historique)

Le calcul vectoriel est né de la critique de Leibniz à la géométrie analytique de Descartes.
En effet, la géométrie analytique a été inventée en 1630 par Descartes en collaboration avec Fermat pour soumettre les problèmes géométriques au calcul et les ramener à l'algèbre. Estimant que la théorie de Descartes conduit à des calculs qui éloignent de l'intuition géométrique et que la présence du repère est arbitraire, Leibniz avait pris l'initiative dès 1679 de mettre en place une géométrie pour opérer directement sur les figures. L'entreprise n'a aboutit que près de deux siècles plus tard avec la découverte des vecteurs (CREM, 2002). Hamilton et Grassmann sont les figures les plus représentatives de cette entreprise. Hamilton après avoir tenté sans succès de mettre en place une multiplication des triplets de réels avait découvert les quaternions en 1843. Grassmann avait réussi a donné une explication convaincante de la théorie de Leibniz en 1846 et avait justifié comment l'aire du parallélogramme représentait la multiplication de deux nombres (deux segments) (LEIBNIZ, 1995).
Les opérations sur les objets géométriques sont constitutives du concept de vecteur. En effet l'addition et la multiplication des nombres ont permis de comprendre le sens et la direction.
L'unité (-1) a été inventée pour permettre la caractérisation du déplacement sur une droite et dans le sens opposé à un premier déplacement.
Argand en 1806, partant de la représentation des unités (+1) et (-1) sur une droite réelle en un point O, avait décidé de représenter leur moyenne géométrique par une droite médiane passant par O (la perpendiculaire à la droite réelle en O). Rappelons que la moyenne géométrique de (+1) et (-1) est $\sqrt{(+1)(-1)} = \sqrt{-1}$.
Wallis vers la fin du $XVII^e$ siècle proposa de représenter par $"\sqrt{-1}"$ l'unité sur l'axe perpendiculaire à l'axe des réels. Le passage d'un axe à un autre (rotation d'angle

[4] Cite par Sandra PATONNIER dans *Vecteur, objet d'enseignement multiple.* http://www.inrp.fr/biennale/7biennale/Contrib/longue/7248.pdf

$\frac{\pi}{2}$) et dans le sens positif s'obtient alors en multipliant l'unité précédente par "$\sqrt{-1}$"

3.3- **Analyse pédagogique** (Caractéristiques du fonctionnement du système pédagogique)

L'approche pédagogique en vigueur au Bénin est l'approche par les compétences inspirée du socioconstructivisme (DOISE 1991). A partir d'une activité, l'élève est mis en situation. Il doit déterminer le but de l'activité, mettre en place un plan de travail, exercer des contrôles dès qu'il démarre puis procéder à des corrections sur le plan mis en place dès que c'est nécessaire (CRAHAY, 2008). Comme stratégie, les élèves travaillent d'abord individuellement, en groupe puis collectivement (en plénière). Le système scolaire béninois évolue de façon générale avec des classes à effectifs pléthoriques (au moins soixante élèves par classe), les groupes de travail en classe compte entre quatre et six élèves et aucun critère objectif à priori n'est à la base de la formation de leur constitution.

4- Analyse a *priori*

4.1- Structuration de la séquence

Nous organiserons la préparation de la séquence suivant le tableau 2 ci-après

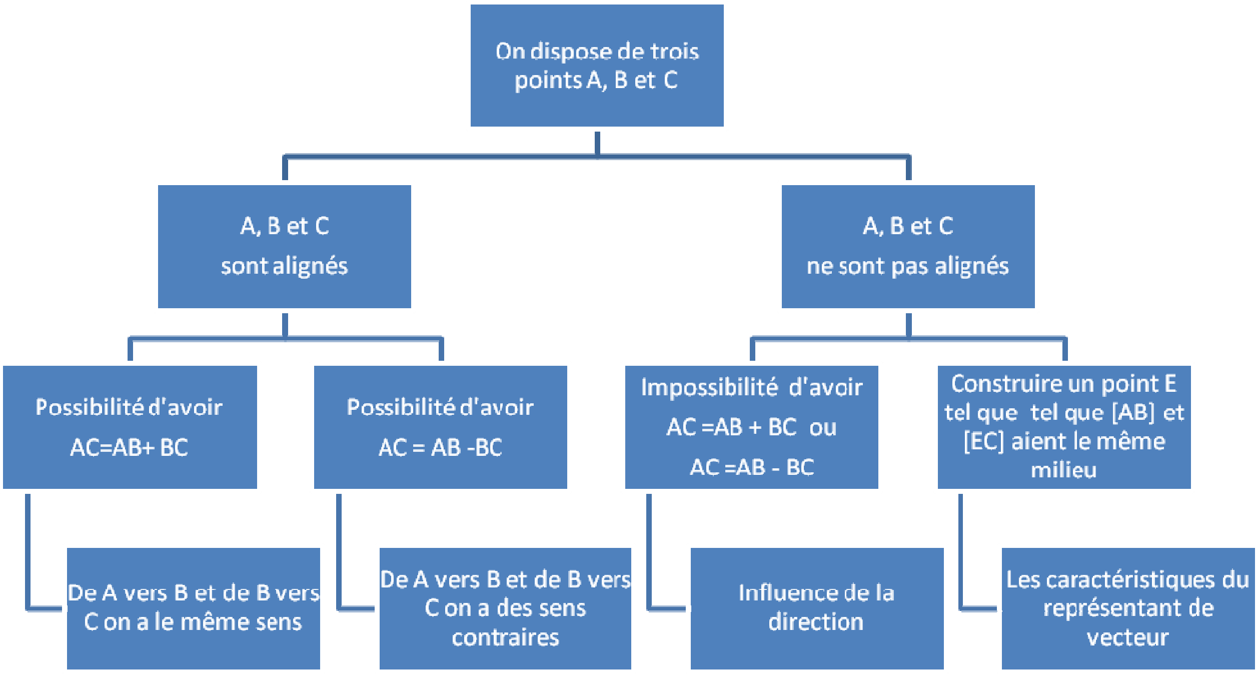

Tableau 2

4.2- Hypothèses

Les élèves découvrent que la notion de sens est liée à celle de la direction (H_1).
Les élèves perçoivent les caractéristiques du vecteur (H_2).
Les élèves ont conceptualisé la notion de vecteur (H_3).
Les hypothèses sont regroupées dans le tableau 3 suivant.

Hypothèses	Réactions attendues pour valider l'hypothèse

H_1	Les élèves donnent la réponse : « *non parce que les points ne sont pas alignés* » (R_1) à l'activité 5.1.2.
H_2	Les élèves donnent la réponse : « *parallèles, même longueur et même sens parce que ABCE est un parallélogramme*» (R_2) à l'activité 5.1.3.
H_3	Les élèves donnent la réponse : « $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HI}$ » (R_3) à l'activité 5.3.

Tableau 3

5- Expérimentation

L'expérience a lieu dans une classe de 4e de 36 élèves d'un collège situé dans une zone où lire, parler et écrire le français posent quelques difficultés aux élèves. Ils possèdent également très peu de documentation. La notion de vecteur n'est pas encore abordée. Le professeur est titulaire du baccalauréat série D et a une ancienneté de deux ans.
Un entretien avec le professeur pour vérifier les pré-requis indispensables pour mener l'activité nous a amené à introduire le cercle sans lequel les élèves ne reconnaîtraient pas l'hexagone régulier. Le temps nécessaire est accordé aux élèves pour faire les activités. L'activité de réinvestissement a été donnée le lendemain.

5.1- Activité de découverte du sens et de la direction d'un vecteur

Soient A, B et C trois points distincts et alignés du plan.
Sur chacune des droites suivantes de la figure 1,, place les points A, B et C de sorte que le point A soit placé avant les points B et C (il y a deux possibilités).

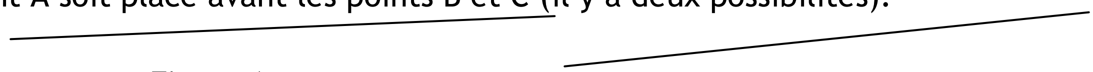

Figure 1

On veut quitter le point A pour aller au point C.
Sachant qu'on doit nécessairement passer par le point B, représente par des flèches les différents trajets.
Ecris devant chaque représentation l'équation correspondante choisie parmi les équations suivantes : $AB + BC = AC$; $AC + CB = AB$.
Pour la suite de l'activité, les points A, B et C ne sont plus alignés. On veut se déplacer du point A au point C en passant par le point B.
Les figures suivantes représentent le parcourt :

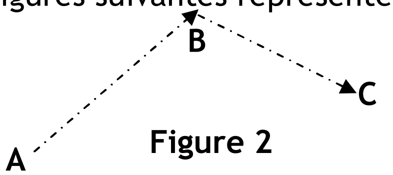

Figure 2

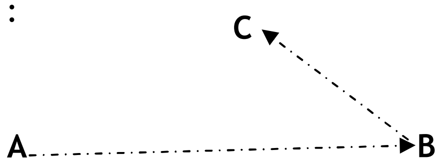

Figure 3

Pour les figures 2 et 3 a-t-on AC=AB+BC ou AB=AC+CB ? Justifie ta réponse.
Sur la figure 3, représente un point E tel que les segments [AC] et [BE] se coupent en leur milieu.
Dans chacun des cas suivants coche la bonne réponse.
Les droites (EC) et (AB) sont parallèles ☐
Les droites (EC) et (AB) ne sont pas parallèles ☐
$EC = AB$ ☐

$\overrightarrow{EC} \neq \overrightarrow{AB}$ ☐

de E vers C et de A vers B on a le même sens ☐

de E vers C et de A vers B on a des sens contraires ☐

Justifie tes choix.

5.2-Activité de décontextualisation

Soit la figure 4 suivante où ABFHGD est un hexagone régulier de centre E et BCF et HIF deux triangles équilatéraux.

1- A l'aide des points choisis dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, forme tous les parallélogrammes dont un coté est [A C].

2- A l'aide des points choisis dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, forme tous les parallélogrammes dont un coté est [A D].

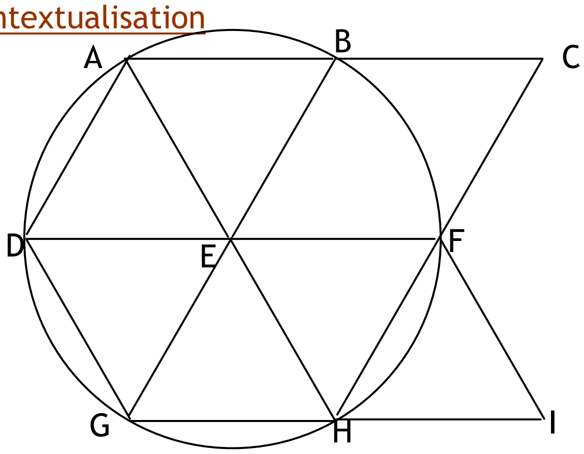

Figure 4

5.3- Activité de réinvestissement

Soit la figure 5 suivante où ABCDEF est un hexagone régulier de centre G et IAF et FEH deux triangles équilatéraux. Observe la figure puis cite tous les représentants du vecteur dont $\overrightarrow{BC}$ est un représentant.

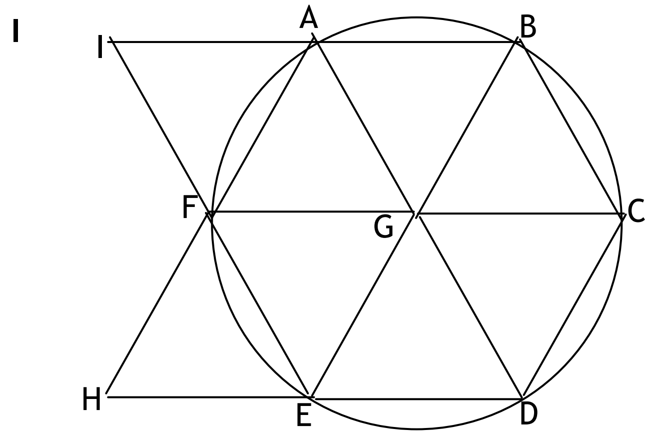

Figure 5

6- Analyse a *posteriori*

6.1- Réponses attendues et informations

Nous avons regroupé les réponses attendues et les informations à donner aux élèves dans le tableau 4 suivant.

N° de l'activité		Réponses	Informations
5.1. 1	a)	1er cas : on place dans l'ordre A, B puis C sur une droite. 2e cas : on place dans l'ordre A, C puis A sur une droite.	*Dans le cas où $AB + BC = AC$ on dit qu'on a le même sens quand on va de A vers B et de B vers C.* *Dans le cas où $AC + CB = AC$ on dit qu'on a des sens contraires quand on*
	b)	1er cas : flèche de A vers B puis flèche de B vers C (même sens).	

		2^{e} cas : flèche de A vers B puis flèche de B vers C (sens contraires).	*va de A vers B et de B vers C.*
	c)	1^{er} cas : $AC = AB + BC$. 2^{e} cas : $AB = AC + CB$.	
5.1.2	Figure		*Dans la question 1-b) on dit que les droites (AB) et (BC) ont la même direction.*
	Justification	On ne peut pas avoir $AC = AB + BC$ parce que les points A, B et C ne sont pas alignés.	
		De même puisque $AC = AB - BC$ signifie $AB = AC + BC$ les points A, B et C ne sont pas alignés	
5.1.3		Les droites (EC) et (AB) sont parallèles $EC = AB$ De E vers C et de A vers B on a le même sens ABCE est un parallélogramme	
5.2	1-	ACFD et ACIG	*L'ensemble des couples de points (M, N) tels les segments [AN] et [BM] se coupent en leur milieu est appelé <u>vecteur</u>.* *On ne peut pas le « dessiner », mais on peut en montrer des représentants dont un est noté $\overrightarrow{AB}$.* *Quand deux représentants sont égaux, ils représentent le même vecteur.* *<u>Exemple</u> : Dans la question 2), $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$, on dit que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des représentants du même vecteur.*
	2-	ADFC, ADGE, ADEB, ADHF	
5.3		$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HI}$.	

Tableau 4

6.2- Résultats

Les scores obtenus sont regroupés dans le tableau 5 ci-après.

N° de l'activité		Réponse			Commentaires
		Acceptable	partielle	Erronée	
5.1.1	a)	06	28	02	-L'ordre alphabétique semble avoir influencé la disposition des points sur les droites. -Deux flèches de sens contraires sur une droite semblent ne pas être acceptées.
	b)	03	17	16	
	c)	04	10	22	
5.1.2	Figure	20		16	

	Justification	17		19	
5.1.3		17		19	
5.2	1-	02	21	13	Les sommets des parallélogrammes sons cités en désordre.
	2-	00	25	11	
5.3		09	15	09	Il y a trois (03) absents

Tableau 5

6.3- Analyse

Les scores obtenus sont : 17 sur 36 soit 47,22% pour les réponses (R_1) et (R_2) et 09 sur 33 soit 27,27% pour la réponse (R_3). Ces scores nous amènent à rejeter les trois hypothèses (H_1), (H_3) et (H_2).
Les causes de ces scores semblent être :

- l'absence de données numériques dans l'énoncé vu que certains élèves ont attribué des longueurs aux segments avant de travailler,
- la non perception du sens du mot déplacement qui renferme à lui seul l'idée des trois caractéristiques du vecteur.

Un mois plus tard, une nouvelle évaluation ainsi libellée a été donnée aux élèves :

« a) *Place sur une droite* (Δ) *les points A, B et C tels que AB=5cm, BC=2cm et AC=7cm.*

Que peux-tu dire du sens des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ *?*

b) *Place sur une droite* (Δ') *les points A', B' et C' tels que A'B'=5cm, B'C'=2cm et A'C'=7cm. Que peux-tu dire du sens des vecteurs* $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ *?* ».
Les bonnes réponses ont donné 19 sur 30 soit 63,33% dans les deux cas. Ceci est significatif quant à la conceptualisation du « sens » d'un vecteur.

7- Conclusion

Nous avons élaboré une ingénierie didactique pour l'introduction de la notion de vecteur en classe de 4^{e} en nous inspirant de l'histoire des vecteurs. C'est ce qui justifie le choix mathématique de ne pas utiliser la translation. L'histoire des vecteurs peut être identifiable à quelques variables dont les nombres. En n'utilisant que les cadres graphique et algébrique dans les activités, nous nous sommes rendu compte que des obstacles et quelques erreurs ont persistés. La légère amélioration notée avec l'introduction des nombres semble suggérer l'utilité des nombres dans l'introduction de la notion de vecteur en 4^{e}. Si nous pouvons considérer le processus cognitif des élèves comme fonction de variable cognitive issues de l'histoire des vecteurs alors nous pouvons étudier les comportements des élèves en fonction de ces variables. Ainsi parviendrons-nous à cerner les effets de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques sur le processus cognitif des élèves. Les nombres ont été utiles dans l'histoire des mathématiques et cette expérience nous permet de constater son influence sur le comportement des élèves. Il reste à multiplier les expérimentations pour arriver à la validation des tendances constatées.

Bibliographie

BERDONNEAU, C. (2006). De l'importance des gestes pour l'apprentissage des concepts mathématiques. *Conférence Pédagogique CRDP* Rouen.
BITTAR, M. (1998). Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Aspects outil et objet dans les manuels. Etude des difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et Cabri – Géomètre II. Grenoble. Thèse de doctorat de l'Université JOSEPH FOURIER.
BROUSSEAU, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Montreal.
CHARBONNEAU, L. (2000). place de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Québec.
CHEVALLARD, Y. (1991). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques,Vol.12/1, ed. La pensé Sauvage, P. 73-112.*
CRAHAY, Marcel et al. (ss. Dir.). (2008). Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ? Bruxelles: De Boeck.
CREM, (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques). (2002). *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur*. Bruxelles: CREM
DORIER, J. L. (2000). Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions . *les cahiers du laboratoire Leibniz, N° 12,* 89 pages.
HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation, N° 2*, p. 329-354.
HOSSON (de), C. (2004). Contribution à l'analyse des interactions entre histoire et didactique des sciences. Elaboration d'un support d'enseignement du mécanisme optique de la vision pour l'école primaire et le collège et premiers éléments d'évaluation . Thèse de doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot.
LÊ THI, H. C. (1997). Etude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France. Thèse de doctorat l'Université JOSEPH FOURIER – Grenoble I et du Viêt-nam.
LEIBNIZ, G. W. (1995). *La caractéristique géométrique*. Paris: VRIN.
TOURE, S. (1995). CIAM Collection Inter Africaine de Mathématiques 4e. ITALIE: EDICEF.
TOURNES, D. (1993). Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire. Réunion: Expressions.