

Etude de lois de distribution pour l'analyse des fréquences de crue à la station hydrométrique de Bonou au Bénin

Taofic BACHAROU^{1,2*}, Moudachirou ADJIBOICHA² et Gérard DEGAN¹

¹ *Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquée (LEMA), Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi, Université d'Abomey-Calavi, 01 BP 2009 Cotonou, Bénin*

² *Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Eau (LSTE), Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi, Université d'Abomey-Calavi, 01 BP 2009 Cotonou, Bénin*

* Correspondance, courriel : btaofic@yahoo.fr

Résumé

Cette étude montre comment les distributions Lognormale, Gumbel pour l'ajustement de débits maximums annuels et la distribution exponentielle pour les débits supérieurs à un seuil donné à la station de Bonou au Bénin ne sont pas adéquates. Parmi les distributions initialement envisagées, les distributions des valeurs extrêmes généralisées (GEV) et celle de Pareto sont celles qui permettent une meilleure reproduction des caractéristiques statistiques des débits maximums annuels et des débits supérieurs à un seuil observés. La comparaison des distributions a été réalisée selon différentes méthodes : racine carrée de la moyenne des écarts quadratiques, coefficient de corrélation de la courbe des probabilités et diagrammes des ratios des L-moments. Cette dernière méthode permet d'apprécier si une distribution envisagée est susceptible de simuler la variabilité de site à site des caractéristiques statistiques présentes dans les échantillons de débits de crue.

Mots-clés : *loi de distribution, fréquence, débit, crue.*

Abstract

Study of distribution laws for frequencies flood analysis in the hydrometric station of Bonou to Benin

This paper discusses how lognormal, Gumbel distributions and exponential distributions were eliminated as candidates for modelling at maximum discharge series in hydrometric station of Bonou to Benin. Among candidate distributions, the generalized extreme value distribution and the Pareto distribution best represented the statistical characteristics of observed data. Comparisons of distributions were based upon the root mean square deviation in fit, the probability plot correlation coefficient and L-moment ratio diagrams. The last method assesses whether a candidate distribution is capable of simulating the site-to-site variation in statistical characteristics that is present in observed flood samples.

Keywords : *distribution law, frequency, flow, flood.*

1. Introduction

Un des problèmes importants en hydrologie est le choix d'une fonction de distribution de fréquence pour l'ajustement de série de débits maximaux annuels ou supérieurs à un seuil dans une région ou un pays. Ce problème a reçu une attention considérable. Par exemple [1, 2] ont étudié la prévision des crues en Algérie ; [3, 4] ont étudié plusieurs distributions des débits de crue aux USA ; [5] a mené la même étude dans le ROYAUME-UNI ; [6] a enquêté sur les distributions de débits en Australie ; [7] ont étudié les séries de débits de crue en Italie ; [8] ont examiné des séries de débits de crue en Ecosse ; [9] a enquêté sur des distributions de débits au Maroc et [10] a comparé plusieurs distributions pour l'analyse des fréquences de débits de crue au Kenya. Au Bénin, [11, 12], ont mené respectivement sur les bassins de la Sota et du Zou des analyses statistiques sur les événements hydro-climatiques. Une revue excellente de la question de sélection d'une distribution pour une région ou un pays a été faite par [13] dans un rapport de l'hydrologie opérationnelle pour l'Organisation Météorologique Mondiale (OMM). Il a observé que les tests d'adéquation conventionnels tels que les tests de chi-deux ou de Kolmogorov-Smirnov donnent de petites valeurs dans ce contexte. Il a aussi accentué l'importance de différentes études qui examinent les caractéristiques statistiques des échantillons de débits de crue observés d'une part et des échantillons aléatoires tirés des distributions candidates d'autre part. [14] ont également discuté de la question de la sélection des distributions.

Le problème du choix d'une distribution est plus difficile dans les régions avec des séries de débits de crue courtes. La sélection d'une distribution appropriée est aussi cruciale dans l'estimation des débits de crue de projet de période de retour de 50 ou 100 ans qui sont estimés par extrapolation de la distribution adéquate. C'est le cas avec les données issues de la station de Bonou. La difficulté principale avec les séries courtes est que les moments statistiques conventionnels sont hautement biaisés et très variables. Cependant, les L-moments statistiques récemment introduits sont presque non biaisés et sont proches d'une distribution normale dans le cas de petits échantillons [15, 16]. Dans cette étude, les L-moments ont été utilisés pour la comparaison des caractéristiques statistiques de petits échantillons aléatoires tirés d'une distribution théorique avec ceux de l'échantillon observé. Trois distributions sont testées dans l'analyse par la méthode de maxima annuels (MA) et deux distributions sont testées par la méthode des seuils à Bonou. La distribution Gumbel est utilisée au Bénin pour la conception des ouvrages hydrauliques et des instruments de lutte contre les inondations à l'échelle des bassins versants.

Quelques études ont été menées en faisant appel à la distribution Lognormale (LN). La distribution de Pareto Généralisée (GPD), la distribution Exponentielle (EXP) et la distribution Généralisée des Valeurs Extrêmes (GEV) sont rarement utilisées. Le présent article est relatif à une étude comparative pour déterminer laquelle des distributions représente le mieux les caractéristiques statistiques des débits de crue observés. Les débits journaliers maxima annuels et ceux supérieurs à un seuil fixé de la station jaugée de Bonou ont été utilisés. La station de Bonou est installée sur le fleuve Ouémé. Elle est située à $06^{\circ}54'35''$ de latitude Nord et $02^{\circ}26'59''$ de longitude Est. La station couvre un bassin versant de superficie égale à 46 990 km² (DG-Eau, 2007). La taille de l'échantillon des débits journaliers maxima annuels est de 46 alors que celle de l'échantillon des débits supérieurs à la moyenne est de 1205. Le test de stationnarité de Kendall a été réalisé sur les différents échantillons. Les statistiques sommaires obtenues sur les deux échantillons sont consignées dans le (*Tableau 1*) ainsi que celles obtenues par la méthode des L-moments. Les faibles valeurs obtenues pour les coefficients de variation montrent une homogénéité entre les différents débits observés.

2. Données et méthodes

2-1. Données

Les débits journaliers maxima annuels et ceux supérieurs à un seuil fixé de la station jaugée de Bonou ont été utilisés. La station de Bonou est installée sur le fleuve Ouémé. Elle est située à 06°54'35" de latitude Nord et 02°26'59" de Longitude Est. La station couvre un bassin versant de superficie égale à 46 990 km² (DG-Eau, 2007). La taille de l'échantillon des débits journaliers maxima annuels est de 46 alors que celle de l'échantillon des débits supérieurs à la moyenne est de 1205. Le test de stationnarité de Kendall a été réalisé sur les différents échantillons. Les statistiques sommaires obtenues sur les deux échantillons sont consignées dans le **(Tableau 1)** ainsi que celles obtenues par la méthode des L-moments. Les faibles valeurs obtenues pour les coefficients de variation montrent une homogénéité entre les différents débits observés.

Tableau 1 : Statistiques sommaires des échantillons étudiés

Débits journaliers maximaux annuels										
Taille de l'échantillon	Min (m3/s)	Moyenne (m3/s)	Max (m3/s)	Ecart-type (m3/s)	Ratios des moments conventionnels			Ratios des L-moments		
					CV	CS	Kurtosis	L-CV	L-CS	L-Kurtosis
46	108.50	791.26	1194	281.17	0.355	-1.00	2.923	0.1929	-0.289	0.1055

Débits journaliers supérieurs à la moyenne des maxima annuels = 791, 26 m3/s										
Taille de l'échantillon	Min (m3/s)	Moyenne (m3/s)	Max (m3/s)	Ecart-type (m3/s)	Ratios des moments conventionnels			Ratios des L-moments		
					CV	CS	Kurtosis	L-CV	L-CS	L-Kurtosis
1205	791.70	915.86	1194	79.19	0.0865	0.5440	2.7595	0.0489	0.1130	0.0746

2-2. Méthodes

2-2-1. Analyse de l'adéquation des ajustements

Deux des méthodes d'analyse de l'adéquation des ajustements basées sur les courbes de probabilités sont utilisées. Ce sont la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) et le coefficient de corrélation de la courbe des probabilités (PPC). Ces méthodes évaluent les écarts entre les débits observés sur un site et les débits ajustés par les différentes distributions. Dans cette étude, les deux paramètres de la distribution Lognormale sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, les deux paramètres des lois de Gumbel et Exponentielle ainsi que les trois paramètres des lois GEV et Pareto sont estimés par la méthode des moments pondérés [17, 18].

2-2-2. Coefficient de corrélation de la courbe des probabilités (PPC)

L'adéquation d'une distribution ajustée peut être évaluée par le coefficient PPC qui est essentiellement une mesure de la linéarité de la courbe de probabilité [19]. Le coefficient PPC a été utilisé par [20] pour classer les ajustements adéquats de différentes distributions. Il donne la corrélation entre les observations ordonnées et les quantiles correspondants déterminés par les courbes d'ajustement. Une valeur du coefficient PPC près de 1,0 indique que les observations auraient pu être tirées de la distribution ajustée. Si y_i représente le $i^{\text{ème}}$ plus petit débit observé, w_i le débit calculé à la $i^{\text{ème}}$ position sur la courbe, \bar{y} la valeur moyenne des observations et \bar{w} la moyenne des valeurs calculées, alors le coefficient PPC de la distribution adéquate d'un site est donné par:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(w_i - \bar{w})}{\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 \right]^{0.5}} \quad (1)$$

Où n est la taille de l'échantillon.

Une **Formule** pour déterminer les fréquences empiriques est nécessaire pour obtenir les valeurs de w_i à partir d'une distribution ajustée. Beaucoup de formules de fréquence empirique peuvent être exprimée sous une forme générale [6] :

$$F_i = \frac{i - a}{n + 1 - 2a} \quad (2)$$

Où F_i est la fréquence de non dépassement et i est le rang en ordre croissant des observations avec $i = 1$ pour la plus petite des valeurs observées dans l'échantillon.

Dans cette étude, la **Formule** de Gringorten ($a = 0.44$) a été utilisée pour les distributions de Gumbel et Exponentielle [20] ; la **Formule** de Blom ($a = 0.375$) pour la distribution Lognormale [21] et la **Formule** de Cunnane [6], ($a = 0.4$) pour les distributions GEV et Pareto [3]. Les coefficients PPC obtenus pour chaque distribution sont consignés dans le (**Tableau 2**).

Tableau 2 : Résultats de l'équation des ajustements aux données observées

Critère d'adéquation de l'ajustement	Gumbel	GEV	LN	Exp.	GPD
Coefficient PPC	0.974	0.9802	0.797	0.949	0.996
RMSE	0.247	0.217	0.341	0.264	0.072

GEV : Loi Généralisée des Valeurs Extrêmes; LN : loi Lognormale ; Exp. : loi Exponentielle, GPD : Loi de Pareto

Une simple statistique de qualité d'ajustement est le test de coefficient PPC développé par [19] pour la normalité. L'application de ce critère à l'analyse de la fréquence des données hydrologiques a été étudiée par [20-23, 4].

2-2-3. Racine carrée de l'écart quadratique moyen (RMSE)

Une méthode fréquemment utilisée pour évaluer la qualité de l'ajustement d'une fonction est la RMSE. Cette méthode a été utilisée avec d'autres méthodes par NERC [5] pour le classement des distributions candidates à différents ajustements. Le RMSE de la distribution des données ajustées aux données observées à une station est calculée comme suit :

$$RMSE = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - w_i}{y_i} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3}$$

Les valeurs obtenues pour le calcul de la RMSE pour les différentes distributions sont consignées dans le **(Tableau 2)**.

3. Résultats

3-1. Classement des distributions étudiées

Sur la base des résultats de la qualité de l'ajustement du site, chaque distribution a été affectée d'un rang compris entre 1 et 5, le rang 1 pour la meilleure distribution et 5 pour le pire ajustement. Un résumé des rangs est donné dans le **(Tableau 3)**.

Tableau 3 : Rang de distributions basé sur la qualité de l'ajustement

Critère d'adéquation de l'ajustement	Distribution	Rang
Coefficient PPC	Gumbel	3
	GEV	2
	Lognormale	5
	Exponentielle	4
	Pareto	1
RMSE	Gumbel	3
	GEV	2
	Lognormale	5
	Exponentielle	4
	Pareto	1

3-1-1. Étude des comportements statistiques des l-moments

L'importance des études sur le comportement statistique de la sélection d'une distribution pour un pays ou une région a été examinée par Curmane [11].

Dans cette approche, on examine si les distributions candidates sont capables de produire au hasard des échantillons ayant les mêmes caractéristiques statistiques que les échantillons observés. Cette méthode nécessite la génération de données aléatoires de distributions candidates telles que les tailles des échantillons générés soient similaires à celles des échantillons observés. Dans cette étude, des échantillons de crues synthétiques sur le site de Bonou ont été générées par le réglage des paramètres d'une distribution observée à ceux des paramètres de la distribution ajustée.

3-2. Diagramme des ratios des moments

Le diagramme des ratios des moments est utile comme guide dans le choix d'une distribution décrivant un ensemble de variables aléatoires. Les diagrammes des ratios des moments peuvent être construits en utilisant soit les ratios classiques des moments ou les ratios des L-moments. Dans le manuel récent de l'hydrologie, [14] ont discuté des avantages des diagrammes de ratios des L-moments dans la sélection d'une fonction de répartition de fréquence. [24] ont conclu que les estimateurs conventionnels des moments devraient être remplacés par les estimateurs des L-moments pour la plupart des bons ajustements d'applications en hydrologie. Un diagramme de ratio de moment est un graphique de ratio de moment d'un ordre donné en fonction d'un ordre inférieur tel que la L-CS vs L-CV ou L-kurtosis vs L-CS.

3-2-1. L-moments

Les L-moments, introduites par [15], sont une autre façon de résumer les propriétés statistiques des données hydrologiques. Les L-moments peuvent être exprimées comme des combinaisons linéaires de moments de probabilités pondérés. Des détails des L-moments sont également donnés par [14].

3-2-2. Diagramme du ratio des L-moments

[11, 15] ont démontré par rapport au diagramme des ratios des moments que, les diagrammes de ratio des L-moments possèdent une meilleure capacité de distinction entre plusieurs distributions. [24] ont utilisé un diagramme t_4 vs t_3 pour explorer la pertinence de divers modèles de fréquence des débits de crue dans le sud des États-Unis. Dans cette étude, les deux diagrammes t_3 vs t_2 et t_4 vs t_3 ont été examinés. La (*Figure 1*) montre les points t_3 vs t_2 obtenus à partir des données sur les débits de crue observés et des données générées par les distributions Lognormale (LN), Gumbel (GUM), GEV, Exponentielle (EXP) et Pareto (GPD). De même, la (*Figure 2*) montre les points construits à partir de t_4 vs t_3 . Le (*Tableau 4*) présente les ratios des L-moments issus de l'échantillon observé et ceux des distributions employées.

Tableau 4 : Comparaison entre les ratios des L-moments générés et ceux des L-moments observés

Distribution	L-CV	L-CS	L-Kurtosis
Observations (Maxima annuels)	0.1929	-0.2887	0.1055
Gumbel	0.1697	-0.1700	0.1552
GEV	0.1913	-0.1851	0.1203
Lognormale	0.3031	0.2612	0.1797
Observations (supérieures au seuil)	0.0489	0.1130	0.0746
Exponentielle	0.0680	0.3335	0.1669
Pareto	0.0547	0.1714	0.0617

4. Discussion

La comparaison entre le L-CV et le L-CS des (*Figures 1a et 1b*) révèle que les données produites par les distributions GEV et Pareto sont principalement près des observations. Les données produites dans les graphiques L-kurtosis vs L-CS des (*Figures 2a et 2b*) peuvent être considérées comme semblables à ceux des données observées. Les conclusions faites de l'analyse basée sur les RMSEs et les coefficients PPC dans les (*Tableaux 2 et 3*) montrent que les distributions GEV et Pareto conduisent à un excellent ajustement des débits de crue. L'étendue des données dans les (*Figures 1 et 2*) montre que les distributions Gumbel, Lognormale d'une part et celle de la loi Exponentielle conduisent à des valeurs très différentes (cas des lois Lognormale et exponentielle) de celles observées. D'autre part les distributions Lognormale et Exponentielle montrent quelques dissemblances avec la dispersion des données observées sur les (*Figures 1a et 1b*). Les L-CV, L-CS et L-kurtosis produits, étaient généralement plus grands que les valeurs observées. Les (*Tableaux 2 et 3*) montrent que les distributions Lognormale et Exponentielle donnent un mauvais ajustement des données. Quand un test statistique basé sur le coefficient PPC développé par [21] est appliqué pour vérifier si les logarithmes de données sont distribués normalement, la distribution Lognormale a été rejetée à un seuil de signification de 5 %. Dans le cas du L-kurtosis vs L-CS obtenu pour la distribution de Gumbel de deux paramètres (*Figure 2a*), la plupart des données sont groupées autour du point $t_3 = -0.17$ et $t_4 = 0.15$ qui correspondent aux valeurs de la population pour une distribution de Gumbel. Notons que la distribution de Gumbel est un cas particulier de la distribution GEV avec un L-CS fixe. La dispersion des données dans le diagramme L-CV vs L-CS de la (*Figure 1a*) est assez dissemblable de celle des données observées dans la (*Figure 1b*). L'ajustement des données par la distribution de Gumbel est aussi moins précis comme le montre les (*Tableaux 2 et 3*).

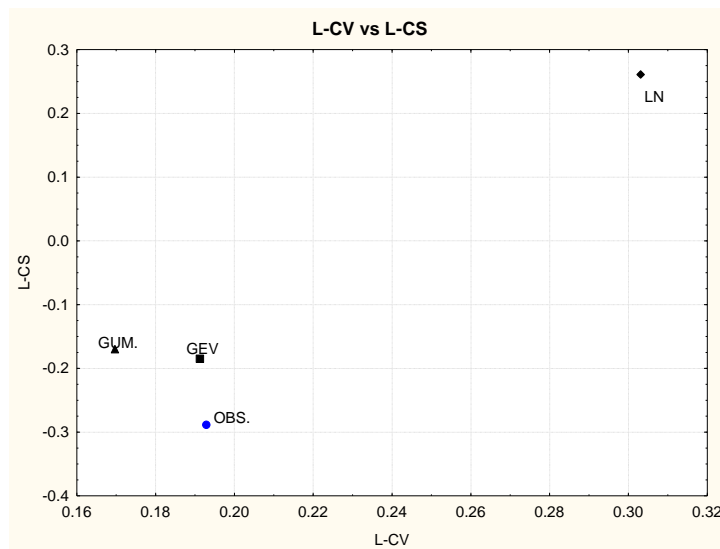


Figure 1a : Diagramme L-CV vs L-CS construit à partir des débits de crue observés à Bonou et ceux générés par les distributions de GEV, Gumbel et Lognormale

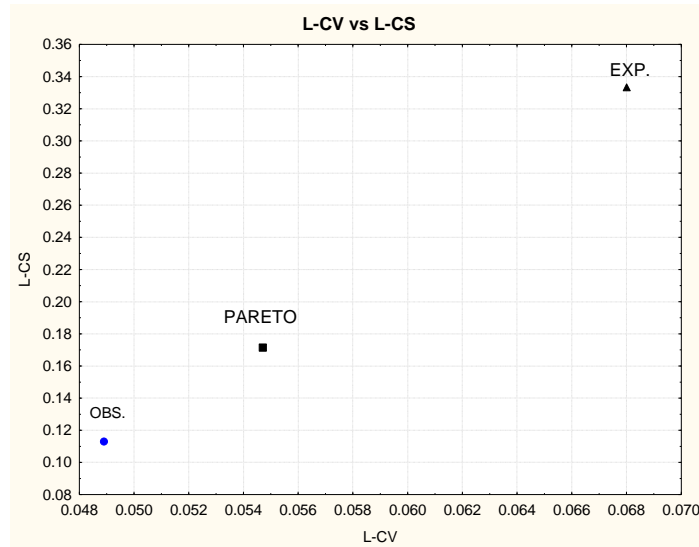


Figure 1b : Diagramme L-CV vs L-CS construit à partir des débits de crue supérieurs à un seuil observés à Bonou et ceux générés par les distributions de Pareto et Exponentielle

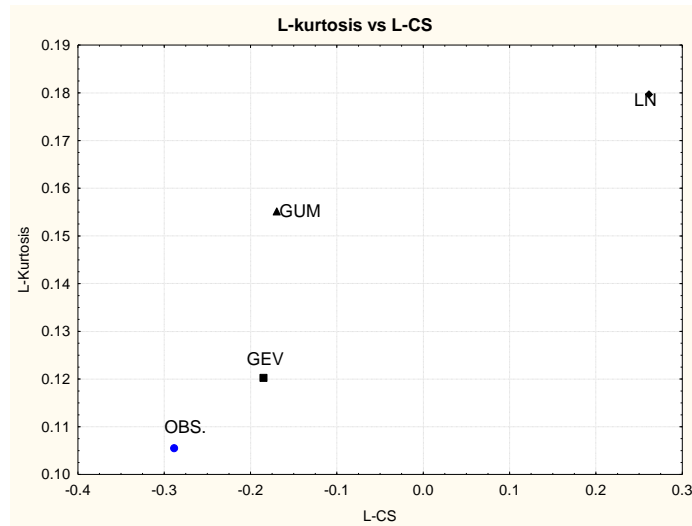


Figure 2a : Diagramme L-Kurtosis vs L-CS construit à partir des débits de crue observés à Bonou et ceux générés par les distributions GEV, Gumbel et Lognormale

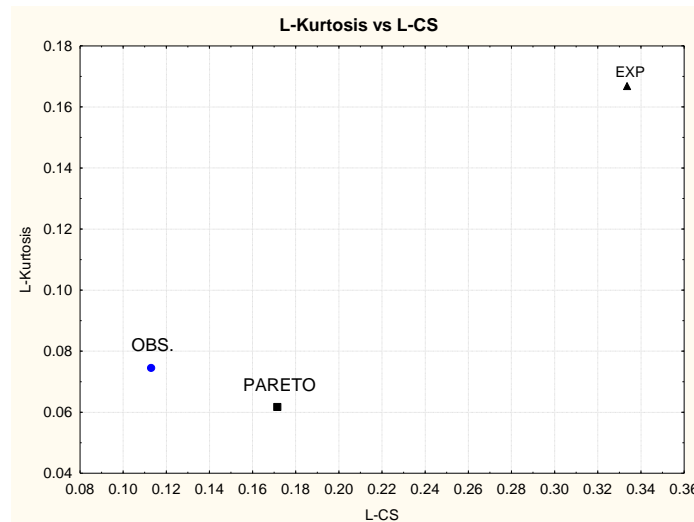


Figure 2b : *Diagramme L-Kurtosis vs L-CS construit à partir des débits de crue supérieurs à un seuil observés à Bonou et ceux générés par les distributions de Pareto et Exponentielle*

Le coefficient d'asymétrie (L-CS) est une mesure de la forme d'une distribution. Une analyse combinée des diagrammes de ratio des L-moments, des rangs des distributions ainsi que les coefficients de corrélation PPC obtenus nous permet d'observer une détérioration rapide des ajustements avec les distributions à deux paramètres (Gumbel et Exponentielle). C'est parce que les distributions Gumbel et Exponentielle ne possèdent pas beaucoup de flexibilité dû à leur forme fixe. L'ajustement par la distribution Lognormale aussi s'est généralement détérioré avec l'augmentation du coefficient d'asymétrie de l'échantillon mais pas comme dans le cas de la distribution de Gumbel. L'influence du coefficient d'asymétrie de l'échantillon sur l'ajustement par les distributions de trois paramètres (GEV et Pareto) n'était pas proéminente, mais l'ajustement a eu tendance à se détériorer quand le coefficient d'asymétrie de l'échantillon a augmenté. Une légère détérioration dans l'ajustement pour les distributions GEV, Gumbel et Lognormale a été aussi observée quand le L-CS de l'échantillon est négatif. Les RMSE et coefficients PPC ont donné des résultats semblables comme le montrent les **(Tableaux 2 et 3)**. Cette analyse de l'adéquation des ajustements a montré que les distributions à trois paramètres (GEV et Pareto) ont donné de meilleurs ajustements par rapport aux distributions à deux paramètres (Gumbel, Lognormale et Exponentielle). Les diagrammes de ratios des L-moments permettent de distinguer les distributions à trois paramètres en fournissant une estimation visuelle de la dispersion des ratios de L-moments du site, comme illustré par les **(Figures 1 et 2)**.

5. Conclusion

L'analyse des tests d'adéquation des ajustements et l'analyse des diagrammes de ratios des L-moments ont indiqué que les distributions GEV et Pareto de trois paramètres sont convenables pour l'analyse des fréquences de débits de crue maxima annuels d'une part et des débits de crue supérieurs à un seuil d'autre part à la station hydrométrique de Bonou alors que les distributions Gumbel, Lognormale et Exponentielle à deux paramètres ne le sont pas. Il apparaît que les distributions Gumbel et Exponentielle qui ont une forme fixe ne peuvent pas modéliser le coefficient d'asymétrie observé sur les échantillons de débits de crue à la station de Bonou au Bénin.

La distribution à deux paramètres Lognormale s'est largement écartée des données observées à la station de Bonou, mais également les diagrammes des ratios des L-moments ont affiché que cette distribution produit des échantillons aléatoires dont les ratios des L-moments n'étaient pas semblables à ceux des échantillons observés. Cette étude fournit une base pour choisir la distribution GEV parmi les trois distributions employées pour la modélisation des débits de crue journaliers maximaux annuels d'une part et la distribution de Pareto parmi les deux distributions utilisées pour la modélisation des débits de crue supérieurs à un seuil d'autre part à la station hydrométrique de Bonou au Bénin. La prochaine étape devrait être le développement d'une distribution GEV ou Pareto régionale en divisant le pays en régions homogènes pour réduire les incertitudes dûes à la petite taille des échantillons des débits de crue. Les tests d'adéquation des ajustements pour les distributions régionales basés sur les statistiques des L-moments [4, 17] peuvent être utilisés pour confirmer si une distribution régionale proposée est compatible avec les données disponibles pour un site.

Références

- [1] - M. MEDI et A. S. B. ABBES, "Analyse statistique et prévision des débits de crues dans le bassin versant de l'Oued Mekerra (Ouest de l'Algérie)", *Rev. « Nature & Technologies ». C- Sciences de l'Environnement*, 10 (2014) 21 - 31.
- [2] - F. BELAGOUNE, "Etude et modélisation des crues des cours d'eau en milieu semi-aride : cas des grands bassins versants 05, 06 et 07", *Mém. de Magistère, Univ. D'Ouargla* (2012) 181p.
- [3] - M. A. BENSON, "Uniform flood frequency estimating methods for federal agencies", *Wat. Resour. Res.*, 4(5) (1968) 891-908.
- [4] - J. U. CHOWDHURY, J. R. STEDINGER and L. H. Lu, "Goodness-of-fit tests for regional generalized extreme value flood distribution", *Wat. Resour. Res.*, 27(7) (1991) 1765-1777.
- [5] - NERC, "Flood Studies Report", Natural Environment Research Council, vols 1-5 (1975).
- [6] - C. CUNNANE, "Unbiased plotting positions - a review", *J. Hydrol.* 37 (1978) 205-222.
- [7] - F. ROSSI, M. FIORENTINO and P. VERSACE, "Two component extreme value distribution for flood frequency analysis", *Wat. Resour. Res.*, 20(7) (1984) 847-856.
- [8] - M. I. AHMED, C. D. SINCLAIR and A. WERRITY, "Log-logistic flood frequency analysis", *Hydrol.*, 98 (1988) 205-224.
- [9] - M. ZEMZAMI, L. BENAABIDATE, B. LAYAN and A. DRIDRI, "Design flood estimation in ungauged catchments and statistical characterization using principal components analysis: application of Gradex method in Upper Moulouya", *Hydrological Processes*, DOI:10.1002/hyp.9212(2012).
- [10] - F. M. Mutua, "The use of the Akaike information criterion in the identification of an optimum flood frequency model", *Hydrol. Sci. J.*, 39(3) (1994) 235-244.
- [11] - D. H. KOUMASSI, A. E. TCHIBOZO, E. VISSIN et C. HOUSSOU, "Analyse fréquentielle des évènements hydro-pluviométriques extrêmes dans la basin de la Sota au Bénin", *Afrique Science*, 10(2) (2014) 137 - 148.
- [12] - G. A. ATCHADE, E. W. VISSIN, H. S. V. TOTIN et I. YABI, "Analyse fréquentielle des évènements hydro climatiques dans le bassin versant de la rivière Zou au Benin", *XXVIème colloque de l'Association Internationale de Climatologie*, (2014) 75 - 80.
- [13] - C. CURMANE, "Statistical distributions for flood frequency analysis", *Operational Hydrology*, 33 (718) WMO (1989).
- [14] - J. R. STEDINGER, R. M. VOGEL and E. F. GEORGIU, "Frequency analysis of extreme events", *Handbook of Hydrology*, ed. D. R. Maidment. McGraw-Hill, New York, USA Chapter 18(1993).

- [15] - J. R. M. HOSKING, "L-moments : analysis and estimation of distribution using linear combinations of order statistics", *Roy. Statist. Soc. B*, 52(1) (1990) 105-124.
- [16] - J. A. GREENWOOD, J. M. LANDWEHR, N. C. MATALAS and J. R. WALLIS, "Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form", *Wat. Resour. Res.*, 15(5) (1979) 1049-1054.
- [17] - J. R. M. HOSKING, J. R. WALLIS and E. F. WOOD, " Estimation of generalized extreme-value distribution by method of probability weighted moments. ", *Technometrics*, (1985) 251-261.
- [18] - J. M. LANDWEHR, N. C MATALAS and J. R. WALLIS, "Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles", *Wat. Resour. Res.*, 15(5) (1979) 1055-1064.
- [19] - J. J. FILLIBEN, "The probability plot correlation test for normality", *Technometrics*, 17(1) (1975) 111-117.
- [20] - R. M. VOGEL, "The probability plot correlation coefficient test for the normal, lognormal and Gumbel distributional hypotheses", *Wat. Resour. Res.* 22(4) (1986) 587-590.
- [21] - R. M. VOGEL and C. N. KROLL, "Low flow frequency analysis using probability plot correlation coefficients", *J. Wat. Resour. Plan. Manage. ASCE* 115(3) (1989) 338-357.
- [22] - R. M. VOGEL, "Correction of the probability plot correlation coefficient test for the normal, lognormal and Gumbel distributional hypotheses ", *Wat. Resour. Res.* 23(10) (1987) 2013.
- [23] - R. M. VOGEL and D. E. MCMARTIN, "Probability plot goodness-of-fit and skewness estimation procedures for Pearson type 3 distribution ", *Wat. Resour. Res.* 17(12) (1991) 3148-3158.
- [24] - R. M. VOGEL, & N. M. FENNESSEY, "L-moment diagrams should replace product moment diagrams ", *Wat. Resour. Res.* 29(6) (1993) 1745-1752.