LE PROBLEME DU FONDEMENT LOGIQUE DES MATHEMATIQUES ET SON IMPLICATION DANS LE DISCOURS

Alain Corneille TOWOU
Enseignant-Chercheur
Maître-Assistant
Département de philosophie
Spécialité : logique et philosophie du langage
Université d'Abomey-Calavi BENIN
towou@yahoo.fr

RÉSUMÉ

Cet article vise à ressortir les liens qui unissent ces trois notions : logique, mathématique et discours. Elles sont les manifestations majeures de l'effort d'explication rationnelle du monde. Autant la validité du discours est analysée dans la logique autant les mathématiques suivent l'ordre, la mesure dans l'effectuation du langage. La rencontre entre la logique et les mathématiques implique désormais l'indispensable organisation la plus fine de notre savoir du réel. Le discours est présent à chaque étape du processus.

Mots- clés : logique, mathématique, discours, formalisme.

ABSTRACT

This paper aims to come out the links that unite these three notions: logic, mathematics and discourse. They are the major manifestations of the effort to rationalize the world. As much as the validity of discourse is analyzed in logic, mathematics follows order, measure in the realization of language. The meeting between logic and mathematics henceforth involves the essential finest organization of our knowledge of reality. The discourse is present at every step of the process.

Keywords: logic, mathematics, discourse, formalism.

INTRODUCTION

L'idée de base est qu'il y a une forme qui s'impose à toute pensée rigoureuse dans ses opérations, quelle qu'en soit la matière. Qu'il s'agisse aussi bien du géomètre et de la démonstration d'un théorème, du physicien et de la vérification d'une loi ou d'une théorie, etc., le discours doit être conforme aux premiers principes de la raison : principe d'identité (ce qui est, A est A) et le principe de non-contradiction, qui en est la négative : une chose ne peut être à la fois être et ne pas être ; le principe du tiers-exclu : de deux propositions contradictoires, si l'une est vraie, l'autre est fausse ; si l'une est fausse, l'autre est vraie, sans qu'il y ait de tierce solution possible. Le principe d'identité et ses deux corollaires régissent directement l'accord de la pensée avec elle-même.

Lorsqu'on livre une réflexion historique et critique de la logique, le mathématicien et le logicien occupent une position singulière. Les questions que le physicien ou le biologiste, par exemple, peuvent se poser sur leurs sciences (méthode, statut de l'expérimentation) ne sont pas, à proprement parler, des problèmes internes à la physique ou à la biologie. Au contraire, les mathématiciens et les logiciens, depuis un siècle en tout cas, lorsqu'ils cherchent à préciser la nature et les fondements de leurs sciences, rencontrent de véritables problèmes de mathématique ou de logique. Pour être plus précis : la question du fondement des mathématiques est devenue le lieu privilégié d'une interrogation commune à la logique et aux mathématiques, au point qu'il faut pour ainsi dire, aujourd'hui, considérer la logique comme une partie des mathématiques.

Qu'est-ce qui sous-tend ce lien nécessaire entre logique, mathématique et le langage humain ?

Nous aborderons ces liens nécessaires en trois phases. D'abord nous partons des liens historiques qui unissent ces trois champs, ensuite analyser l'axiomatisation du discours par la formalisation des opérations de la pensée et enfin expliquer les nouveaux objets des mathématiques.

I- LOGIQUE, MATHÉMATIQUES ET LANGAGE

1-1- Des liens historiques

La logique et les mathématiques ont connu un développement décisif au même moment que la philosophie, en Grèce, à partir du VIème siècle avant Jésus-Christ. Coïncidence dans le temps, mais aussi concordance des raisons : l'effort d'explication rationnelle du monde triomphe ; philosophie, logique et mathématiques sont ces trois manifestations majeures. Le terme grec logos désigne en effet à la fois, la raison, le discours et le calcul. Il est du reste facile de reconnaitre dans le mot « logique » son dérivé plus direct.

Déjà Aristote marquait bien cette indépendance de la logique à l'égard de l'expérience en remplaçant dans sa théorie du jugement et du raisonnement les termes réels par des lettres. Si je dis : *nul A n'est B, donc nul B n'est A,* ce raisonnement est correct dans la forme, quoi que représentent A et B. En revanche, le raisonnement symétrique : tout A est B, donc tout B est A, est incorrect dans la forme, même si dans certains cas la conclusion est vraie. Par exemple, *Tout losange rectangle* A *est un carré* B et *tout carré* B *est un losange rectangle* A. Mais, selon la forme de la proposition : *tout* A *est* B, on ne peut tirer que *quelque* B *est* A.

Notre tradition scolaire a longtemps classé sous la rubrique logique tout ce qui concerne la réflexion sur la connaissance. L'usage rend souvent synonymes les adjectifs logique et rationnel. Mais c'est très top une science à part entière qui, sous le nom de logique, prend son essor en Grèce. Prolongeant les recherches de ses prédécesseurs sur la pratique de la discussion publique (sur les meilleures façons d'argumenter devant les tribunaux ou les assemblées de citoyens), Aristote pose les premiers principes d'une véritable science des formes du raisonnement.

La logique d'Aristote n'est pas sans lacunes ni surtout sans étroitesse, car elle n'étudie que les propositions prédicatives du type : S (sujet) est P (prédicat ou attribut), exemple : Socrate est un homme, mais non les propositions relationnelles, qui constituent les relations mathématiques, par exemple : le tout est plus grand que la partie. Le progrès des mathématiques au XIXème et au XXème siècle, et en particulier la découverte des géométries non euclidiennes, a rendu indispensable la refonte de la logique. La logique moderne est formelle comme celle d'Aristote, mais elle est de plus symbolique. Ce symbolisme consiste en la création d'une langue artificielle, systèmes de signes écrits distincts de la langue courante. Il substitue aux grammaires des langues réelles, d'où l'on tirait les formes logiques, une grammaire nouvelle, où, inversement les formes du discours sont exactement modelées sur les formes logiques.

Mais ces transformations si profondes qu'elles soient, ne modifient pas l'esprit et les limites, que détermine clairement la distinction établie par Kant entre vérité formelle et vérité matérielle. Les lois logiques régissent l'accord de la pensée à la fois avec elle-même et avec ses objets, mais la vérité formelle ne peut rien nous apprendre sur la vérité matérielle, c'est-à-dire sur ce qui est vrai dans la réalité. En d'autres termes, la matière de la connaissance ne peut être apportée que par l'expérience. Pour E. Kant :

Le critère simplement logique de la vérité, à savoir l'accord d'une connaissance avec les lois universelles et formelles de l'entendement et de la raison, est donc bien la condition sine qua non et par conséquent négative de toute vérité, mais la logique ne saurait aller plus loin (E. Kant 1993, p. 81).

Il ne peut donc y avoir de critère universel de la vérité matérielle, car ce critère devrait en même temps servir en faisant abstraction et en ne faisant pas abstraction de la connaissance des objets, ce qui est contradictoire.

1-2- La validité d'un raisonnement

En langage moderne, nous appelons validité ce que Kant appelait vérité formelle et nous disons que dans ce cas qu'un raisonnement est valide ou valable, ou bien qu'il n'est pas valide ou pas valable. La validité ne concerne que la cohérence formelle du raisonnement. Par exemple, le raisonnement suivant *: tous les aigles sont des mammifères, or les mammifères ont des ailes, donc les aigles ont des ailes*, est valide, la conclusion vraie, mais les deux prémisses sont matériellement fausses. Une conclusion vraie ne permet pas d'affirmer que le raisonnement soit valide. Inversement le raisonnement : *tous les aigles sont des mammifères, donc quelque mammifère est un aigle,* est valide, mais il n'aboutit pas à une vérité.

La validité du raisonnement est sans rapport avec la vérité ou la fausseté matérielle de sa conclusion. La validité du raisonnement étant établie, il faut encore que les prémisses soient vraies pour que la conclusion soit vraie. La validité du raisonnement ou la cohérence du discours sont les conditions nécessaires mas non suffisantes de la vérité. Ainsi les propositions peuvent être vraies ou fausses, le raisonnement ne peut être que valide ou invalide.

La forme d'une opération de l'entendement, c'est la nature du rapport qui relie entre eux les termes auxquels cette opération s'applique, abstraction faite de ce que sont ces termes en eux-mêmes, comme de ce à quoi ils renvoient dans la réalité. Aristote s'attache donc en priorité à la première forme du raisonnement productif du point de vue de la connaissance. Ainsi le syllogisme est un enchainement de trois propositions qui permet, grâce à un moyen terme, de tirer une conclusion de deux propositions concrètes. Il substitue des schémas formels, où des lettres à valeur purement symbolique remplacent les termes pourvus d'une signification dans la langue ordinaire (l'homme est mortel devient B appartient à A. L'objet de la logique n'est donc pas la vérité matérielle des propositions qui composent les raisonnements étudiés. Elle établit les conditions des enchainements de propositions. Son propos n'est pas de savoir s'il est ou non vrai que « tout homme est mortel », mais d'établir à quelles conditions une conclusion vraie pourrait être déduite de toute proposition de cette forme.

Un critère universel de la vérité serait celui qu'on pourrait appliquer à toutes les connaissances sans distinction de leurs objets. Il est clair qu'il est tout à fait impossible et absurde de demander un caractère de la vérité de ce contenu des connaissances, et que, par conséquent, une marque suffisante et en même temps universelle de la vérité ne peut être donnée (E. Kant 1993, p. 81).

Aristote et successeurs n'aperçurent pas d'emblée l'extraordinaire portée de cette entreprise de formalisation. Au XVIIème siècle, certains philosophes vont jusqu'à juger dangereuse l'idée même qu'une science prétende imposer ses normes à l'art de penser. Locke souligne le risque de privilégier l'art de disputer au détriment de la saine recherche de la vérité elle-même. Seul Leibniz anticipe alors sur les progrès ultérieurs de la logique formelle puis mathématique, en défendant le principe d'une véritable théorie infaillible de la démonstration. L'idée de réduire le raisonnement à un calcul, qui domine les recherches logiques de Leibniz, inaugure l'évolution vers ce qu'on appellera le formalisme. Formaliser complètement la logique, tel sera l'objectif poursuivi par un certain nombre de chercheurs du XIXème siècle et du début du XXème siècle, Frege et Russell en particulier.

II- L'AXIOMATISATION DU DISCOURS

2-1- La formalisation des opérations de la pensée

Pour devenir un outil parfaitement rigoureux et puissant, la logique devait devenir un système de signes absolument univoques, donc distincts de ceux des langues naturelles. Les opérations de la logique moderne sont ainsi ramenées à des enchainements de calculs dépouillés de tout appel à l'intuition. Même dans ce cas, l'analyse logique permet de comprendre les faits correspondants. C'est ce qui ressort de l'interprétation de B. Linsky :

> *Donc, l'atomisme logique est un point de vue métaphysique inspiré par une analyse logique mais non une simple projection des caractéristiques du langage dans le monde. L'analyse des propositions est plutôt un guide pour l'analyse des faits qui leur correspondent, une analyse qui, cependant, nous permet de découvrir les catégories logiques du monde et les atomes logiques qui le constituent (B. Linsky, 2003, p. 372).*

A la même époque, les mathématiques traversent une crise due, précisément, aux limites de leur formalisation. Seul un langage artificiel, parfaitement contrôlable, permet de fonder rigoureusement la validité de toutes les opérations effectuées à partir des signes qui le constituent. Or le langage mathématique, au XXème siècle, ne remplit pas complètement ces conditions. L'intuition peut jouer un rôle dans la définition des objets mathématiques, certains énoncés sont absolument nécessaires mais indémontrables, un certain nombre de termes ou d'opérations ne peuvent être définis que les uns par rapport aux autres, etc. L'idée s'impose alors que la solution au problème du fondement des mathématiques pourrait venir de la logique : les mathématiciens ne devraient-ils pas emprunter à celle-ci ses procédures parfaitement codifiées ?

Parmi les nombreuses difficultés auxquelles se sont régulièrement heurtés les mathématiciens soucieux d'asseoir leur discipline sur des fondements rigoureux, la principale a longtemps été celle de la nature même des objets mathématiques. Elle peut être résumée assez simplement. La question est de savoir si les mathématiques ont enracinement décisif dans le réel, ou si leurs constructions sont au contraire complètement abstraites. Comme le fait remarquer le mathématicien contemporain Dieudonné, il est évident que « compter, mesurer sont des opérations qui permettent de résoudre des problèmes d'ordre pratique ».

2-2- Les objets mathématiques

Cependant les êtres mathématiques, les nombres, les figures géométriques, n'existent pas à proprement parler dans la réalité. Compter trois arbres, traverser un lac de forme ronde, etc., ce n'est pas rencontrer le chiffre 3 ou un cercle. Les figures géométriques en soi sont les modèles abstraits de celles que l'on dessine, celles-ci ne faisant que leur ressembler, pour reprendre les termes de Platon. Mieux, pour E. Husserl, le géomètre explore des possibilités idéales :

> *Le géomètre lorsqu'il trace au tableau ses figures, forment des traits qui existent en fait. Mais pas plus que le geste physique de dessiner, l'expérience de la figure dessinée, en tant qu'expérience, ne fondent aucunement l'intuition et la pensée qui portent sur l'essence géométrique (E. Husserl, 2018, p. 47).*

Les objets mathématiques ne sont cependant pas situés dans un ciel surplombant le monde sensible ; bien au contraire, ces structures idéales sont lisibles dans le monde même qu'elles gouvernent. J. T. Desanti (1975, p. 225), pour sa part, estime que : « Les mathématiques ne sont pas du Ciel. Cela veut dire qu'il n'existe nulle part un univers d'êtres mathématiques, un en-soi mathématique auquel les mathématiques pratiquées par les hommes donneraient accès ». L'interrogation sur la nature des objets mathématiques renvoie à une interrogation plus fondamentale : celle de leur construction. En d'autres termes, d'où viennent ces outils, complètement abstraits et étonnamment utiles dans la réalité ?

Ce ne sont donc pas tant les objets mathématiques eux-mêmes qui constituent un problème, que la nature des opérations qui les produisent, ou que l'on effectue avec eux. Les mathématiques sont ce qu'on appelle une science hypothético-déductive, c'est-à-dire un domaine du savoir dans lequel tout ce qui est établi procède d'enchainements déductifs. Pour R. Descartes (2011, p. 15) « ces longues chaines de raisons » ont pour caractéristiques à la fois de s'enraciner dans les vérités posées par hypothèse et de constituer, dans la plupart des cas, la vérification de ces hypothèses. Ces vérités hypothétiques sont les postulats et les axiomes. A la base de tout édifice mathématique, il y a également des définitions. Un théorème est une proposition dont la démonstration est possible par déductions successives, en se fondant sur les axiomes ou sur d'autres théorèmes, déjà démontrés. Ainsi une démonstration mathématique consiste donc à réduire progressivement le non encore connu à du déjà connu, c'est-à-dire, en partant des définitions, des postulats des axiomes, des théorèmes déjà démontrés, à vérifier ou à produire de nouveaux théorèmes.

Dès l'instant où toutes les bases, comme toutes les règles utiles à une démonstration, sont définies a priori, elles le sont en stricte adéquation avec les exigences de celles-ci. Les conditions de possibilités d'un raisonnement parfaitement rigoureux sont ainsi acquises d'avance, et, avec elles, l'assurance de trouver au moins « quelques raisons certaines et évidentes ». Descartes fondait cette évidence sur l'idée qu'un certain nombre de vérités mathématiques sont tellement simples que nul ne peut se tromper à leur sujet. Leur connaissance relève de l'intuition immédiate, et beaucoup de déductions sont elles-mêmes intuitives. L'explication des « anneaux intermédiaires » n'est requise que dans les cas les plus complexes. Si la méthode des mathématiques, pour Descartes, peut et doit servir de modèle à la recherche de la vérité en général, c'est précisément parce qu'elle offre les garanties de sureté et de rigueur décrites comme caractéristiques de la logique.

III- LES NOUVEAUX OBJETS MATHÉMATIQUES

3-1- L'évolution des sciences

Le recours à l'évidence ou à l'intuition laisse cependant irrésolus deux problèmes essentiels et liés : celui du fondement des mathématiques et celui de la nature de leur progrès. Si le constant enrichissement des sciences expérimentales s'explique aisément, à la fois par la nécessité et par la possibilité de comprendre toujours mieux le réel, la raison et le moteur de l'évolution des sciences abstraites, comme la logique et les mathématiques, sont forcément d'un autre ordre. Il faut comprendre comment elles peuvent progresser pour ainsi dire de l'intérieur, et au prix de quelles transformations. L'explication est relativement simple pour toutes les découvertes qui précèdent la grande crise du XIXème siècle. Les mathématiciens se donnent de nouveaux objets chaque fois que l'état de leurs recherches les confronte à des problèmes insolubles à l'aide des seuls outils existants au moment où ces problèmes apparaissent.

Dès l'Antiquité, alors que les seuls nombres connus étaient les entiers, pairs ou impairs, et les fractions (quotient d'entiers naturels : 1/3, 2/3, 13/8…), les mathématiciens se heurtent à l'impossibilité de mesurer par un entier ou une fraction la diagonale de carrés dont le côté est pourtant, lui, mesurable par un entier. La crise se résoudra avec la découverte qu'un nombre peut n'être ni entier ni fractionnaire, mais irrationnel, aux sens à la fois d'incalculable et d'impensable. Tout au long de leur histoire, les mathématiques, en quelque sorte, s'autoproduisent, l'invention de nouveaux enchainements démonstratifs entrainant régulièrement la construction de nouveaux objets, l'effectuation de nouvelles opérations. C'est pourquoi la forme que prend au XIXème siècle la question des fondements est décisive. Il apparait alors que ce qu'il faut garantir, c'est la validité même des enchainements démonstratifs dont découlent les mathématiques, entreprise dans laquelle la logique joue un rôle essentiel.

Un problème se pose dans le domaine de la géométrie, dont la solution se révèlera décisive. Dès le III$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ, le mathématicien grec Euclide a donné à la géométrie la forme d'une théorie déductive fondée sur des principes premiers explicitement formulés : définitions, notions communes ou axiomes, postulats ou demandes. Ces postulats sont des propositions évidentes, servent de point de départ aux démonstrations des théorèmes, mais sont eux-mêmes indémontrables. Mais, ne pourrait-on pas, pour assurer plus de rigueur aux bases de l'édifice, se passer de certains de ces postulats, ou plutôt les déduire des autres ? L'idée des successeurs d'Euclide est donc qu'un postulat peut n'être qu'une conjecture qu'on ne sait pas encore démontrer. Pourtant, toutes les tentatives de preuve du fameux postulat des parallèles restent vouées à l'échec, au moins jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Certains essaient de démontrer par l'absurde, c'est-à-dire de monter qu'en remplaçant ce postulat par une affirmation qui le contredit, on aboutirait à des absurdités.

3.2. De l'abstraction mathématique à l'interprétation de la réalité

Au XIX^{ème} siècle, Lobatchevski puis Riemann constatent qu'il est possible, en partant de ces postulats contradictoires, d'élaborer de nouveaux systèmes de géométrie parfaitement cohérents. Certes à la différence de celui d'Euclide, ces systèmes ne semblent pas correspondre à notre réalité. Il faut pourtant savoir qu'Einstein n'a pu construire sa théorie de la relativité générale que dans le cadre d'une géométrie qui généralise celle de Riemann. Si la géométrie d'Euclide n'est pas fausse puisqu'elle reste valide pour l'espace immédiatement accessible à la perception ordinaire, elle ne peut plus être tenue pour un modèle unique de représentation de la réalité. D'une façon générale, un énoncé mathématique ne peut plus être fondé en soi. Il ne peut être fondé que dans le cadre du système d'axiomes que le mathématicien s'est fixé, et ce n'est que dans ce cadre qu'il acquiert sens et fonction opératoire.

Pas plus que d'autres la vérité mathématique ne peut prétendre à l'universalité. Il faut lui substituer, à l'intérieur de chaque système, l'exigence d'une parfaite cohérence interne texte. C'est ce que suggère R. Blanché (1995, p. 6) : « Quant aux systèmes eux-mêmes, il n'est plus question pour eux de vérité ou de fausseté, sinon au sens logique de la cohérence ou de la contradiction interne ». L'affirmation selon laquelle « le tout est plus grand que la partie » est un axiome, ne peut certainement pas figurer à la base de n'importe quel système mathématique. L'ensemble des nombres entiers (N) peut a priori sembler « deux fois plus grand » que l'ensemble des entiers pairs (P), alors qu'ils ont en un certain sens autant d'éléments l'un que l'autre, puisque la suite des nombres entiers est infinie, et qu'à chaque élément de (N) on pourra donc toujours faire correspondre un élément de (P). Pas plus qu'en logique, le critère de la vérité ne peut être l'adéquation à un quelconque contenu de réalité. Ainsi les mathématiques sont un domaine de savoir entièrement construit conformément aux normes de la logique. N. Bourbaki établit le lien entre la logique et les mathématiques en ces termes :

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparait en somme comme un réservoir de formes abstraites – les structures mathématiques ; et il se trouve – sans qu'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance (N. Bourbaki, 1948, p. 47).

Resterait à expliquer par quelle sorte de miracle ces mathématiques complètement abstraites permettent malgré tout de rendre compte de certains aspects de la réalité sensible. Il y a à cela deux raisons. La première est que l'intuition guide indéniablement une partie au moins des recherches. Les progrès de notre connaissance du réel dépendent de plus en plus de notre aptitude à subordonner observation et expérimentation à l'anticipation par le calcul. Pour atteindre l'infiniment grand et l'infiniment petit, il faut les mathématiser. Or cette mathématisation du réel est paradoxalement d'autant plus féconde que les structures mathématiques sont vidées de tout contenu intuitif. Produits de la rencontre entre la logique et les mathématiques, ces outils complètement formels semblent désormais indispensables à l'organisation la plus fine de notre savoir du réel.

CONCLUSION

Ces trois notions logique, mathématique et discours sont étroitement liées. Elles sont les trois manifestations majeures de l'effort d'explication rationnelle du monde. La logique est la science du raisonnement correct, la science relative au processus de la pensée rationnelle et sa validation. Les mathématiques sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les ensembles mathématiques, les nombres, les formes, les structures.. Le discours fait partie intégrante de la logique et des mathématiques et subit les transformations adéquates liées à ces sciences.

BIBLIOGRAPHIE

BLANCHE Robert, 1995, *L'Axiomatique,* Paris, PUF.

BOURBAKI N., 1947, « L'architecture des mathématiques », *Les grands courants de la pensée mathématique,* Paris, Ed. Cahiers du Sud.

DESANTI Jean Toussaint, 1975, *La philosophie silencieuse,* Paris, Seuil.

DESCARTES René, 2011, *Discours de la méthode*, Paris, Les Echos du Maquis.

HUSSERL Edmund, 2018, *Idées directrices pour une phénoménologie pure et une philosophie phénoménologique*, trad. J.-F. Lavigne, Paris, Gallimard.

KANT Emmanuel, 1993, *Critique de la raison pure*, trad. A. Tremesaygues et B. Pacaud, 4ème éd., Paris, PUF.

LINSKY B., 2003, « The Metaphysics of Logical Atomism », in *The Cambridge Companion to Bertrand Russell,* Cambridge University Press,