

ISSN 1727 – 8651

JOURNAL
de la
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
de
L'UNIVERSITÉ DE LOMÉ



LOME - TOGO

Le Journal de la Recherche Scientifique de l'Université de Lomé est
référéncé dans African Journal on Line (AJOL) [www.inasp.org/ajol]

VOLUME 18
(2016)

Numéro 2

SOMMAIRE

Série Sciences Naturelles et Agronomie

1. ADJAGODO A. & *al.* (Bénin)
Spéciation chimique du plomb et du cuivre par extraction séquentielle des sédiments et de l'eau de la retenue de l'Okpara au Bénin, 1
2. DAN GUIMBO I. & *al.* (Niger)
Potentiel de régénération naturelle de *neocarya macrophylla* et *vitellaria paradoxa* dans le sud-ouest nigérien, 13

Série Lettres et Sciences Humaines

3. ATCHOLE E. (Togo)
La nuisance sonore et la qualité de vie dans la ville de Lomé, 27
4. AGBDJOGBE W. K. D. D. & *al.* (Bénin)
Identification et étude photochimique de plantes utilisées comme diurétique au Bénin, 45
5. HOUEDENOU F. (Bénin)
Phénomène de déperdition scolaire féminine : analyse et perspectives d'action pour le développement des compétences au Bénin, 57
6. VISSIN E. W. & *al.* (Bénin)
Variabilité climatique et hydrologique dans la basse vallée de l'Ouémé à Bonou, 69
7. Dr GBAGUIDI G. A. G. & CODO C.-N. (Bénin)
Espaces socio-éducatifs et regard de jeunes : pourquoi les jeunes se sentent-ils exclus des musées ?
..... 83
8. Dr AKINSULIRE Y.P.
Content familiarity, attitude and achievement in dramatic Literature-in-English in Nigeria, 95

Série Droit, Sciences Economiques et de Gestion

9. BALOGOUN I. (Bénin)
Un réexamen de la relation entre l'ouverture commerciale et la pauvreté dans les pays en développement, 107

Série Sciences expérimentales et médicales

10. SANGARE S. A. & *al. al.* (Mali)

Prévalence des entérobactéries productrices de bêta-lactamases à spectre étendu isolées des hémocultures sur le continent africain et les gènes impliqués chez les souches BLSE : revue de la littérature,133

11. TSOLENYANU E. & *al.* (Togo)

Expérience de SPES dans la prise en charge des enfants placés en institution en Afrique,149

12. AYOUBA G. & *al.* (Togo)

Epidémiologie des fractures après 50 ans à Lomé,161

13. KOMBATE D. & *al.* (Togo)

Démence vasculaire en milieu hospitalier au Togo,169

14. AVAKOUDJO J.D.G. & *al.* (Bénin)

Méconnaissance des traumatismes des voies urinaires dans un contexte de poly traumatisme : à propos de deux observations,175

15. GBENOUDON SATO GUINA S. J. & VIKOU R. (Bénin)

Interactions entre le paludisme et les helminthiases : régulation immunitaire, revue de littérature,181

16. TÊKO M. & *al.* (Togo)

Séroprévalence des anticorps anti-HBc chez les donneurs de sang de Lomé (Togo),187

17. AMEDOME K.M. & *al.* (Togo)

Topographie en tomographie en cohérence optique (OCT) des grandes excavations papillaires à Lomé,193

18. SEGBEDJI K.A.R. & *al.* (Togo)

Prévention de la diarrhée chez les enfants de moins de cinq ans : connaissances, attitudes, et pratiques des mères au Centre Hospitalier et Universitaire Sylvanus Olympio de Lomé.,201

19. AMEDOME K.M. & *al.* (Togo)

Profil des affections oculaires chez l'enfant en zone sahélienne : cas de l'Hôpital National de Lamordé à Niamey au Niger,209

20. BELLO A.-W., DJARA T. & GOUDJO A. (Bénin)

Un solveur HLLT pour les équations de Saint-Venant et traitement des confluences et des inondations,217

UN SOLVEUR HLLT POUR LES EQUATIONS DE SAINT-VENANT ET TRAITEMENT DES CONFLUENCES ET DES INONDATIONS

BELLO A.-W.¹, DJARA T.^{2,*}, GOUDJO A.¹

1- Faculté des Sciences et Techniques (FAST), Université d'Abomey-Calavi.
01 BP 526 Cotonou, BENIN

2- Laboratoire d'Electrotechnique de Télécommunications et d'Informatique Appliquée.
Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC). Université d'Abomey-Calavi.
01 BP 2009 Cotonou, BENIN.,

(*) E-mail : esm.djara@gmail.com

(Reçu le 10 Février 2016 ; Révisé le 12 Juin 2016 ; Accepté le 22 Juin 2016)

RESUME

Nous présentons dans ce rapport la résolution, par une méthode volumes finis, du système des équations de Saint-Venant avec termes sources topographiques sur des domaines 1D. Avec une idée originale de Leroux (CHINNAYYA A. et al, 2004), le système des équations est complété par une équation triviale sur la bathymétrie. Par un changement de variable, on élabore une formulation célérité-vitesse des équations que l'on linéarise. Nous construisons ensuite un solveur de Riemann approché qui préserve la positivité de la célérité et qui assure la prise en compte des *bancs-couvrants-découvrants* (LEBUNETE J. et al, 2011). Enfin, des applications numériques sur des cas tests sont présentées.

Mots-clés : Shallow water equations, finite volumes, Riemann solver, positivity preserving scheme, wetting and drying flows.

ABSTRACT

A finite-volume method for the one-dimensional shallow-water equations including topographic source terms is presented. Exploiting an original idea by Leroux (CHINNAYYA A. et al, 2004), the system of partial-differential equations is completed by a trivial equation for the bathymetry. By applying a change of variable, the system is given a celerity-speed formulation, and linearized. As a result, an approximate Riemann solver preserving the positivity of the celerity can be constructed, permitting *wetting and drying flow* simulations to be performed (LEBUNETE J. et al, 2011). Finally, the simulation of numerical test cases is presented.

Keywords: *Equations de Saint-Venant*, volumes finis, solveur de Riemann, schéma positif, bancs couvrants-découvrants.

1. INTRODUCTION

Les écoulements à surface libre et en eaux peu profondes (shallow water) sont modélisés par des équations aux dérivées partielles connues sous le nom d'équations de Saint-Venant.

Pour réaliser une simulation, les équations sont intégrées sur chaque cellule issue d'un maillage

du domaine d'étude Ω ; ceci conduit à la résolution d'un problème de Riemann issu du modèle unidimensionnel des équations de Saint-Venant. Pour résoudre ce problème de Riemann, nous proposons dans ce papier une heuristique de détermination de la hauteur de la région intermédiaire par une linéarisation des équations qui préservent la positivité de cette hauteur. La hauteur ainsi obtenue est ensuite

utilisée dans la détermination des vitesses des ondes les plus rapides du solveur HLL. Par une modification du solveur HLL afin de prendre en compte directement la topographie dans le flux numérique, nous proposons un nouveau solveur, le solveur HLLT (T pour topographie).

Enfin, pour tester la robustesse de notre schéma, dans un premier temps nous reprenons des cas-tests effectués dans (CHINNAYYA A. et al, 2004) puis dans un second temps deux

derniers cas-tests sont présentés pour tester le débordement de l'eau d'un canal (bancs-couvrants-découvrants).

2. Le modèle mathématique

En absence des forces de frottement, le système 1D des équations de Saint-Venant est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = -gh \frac{\partial a}{\partial x} \end{cases}, (x,t) \in IR \times IR_+ \quad (1)$$

$u(x,t)$ est la vitesse de l'eau, $h(x,t)$ la hauteur d'eau, $a(x)$ la hauteur de la topographie du sol, $h+a$ l'élévation de la surface libre de l'eau (a et $h+a$ sont prises par rapport à un plan de référence), g l'accélération gravitationnelle.

La bathymétrie a étant indépendante du temps, on complète le système (1) par l'équation $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$ (CHINNAYYA A. et al, 2004) et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + gh \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \end{cases}, (x,t) \in IR \times IR_+ \quad (2)$$

où $q = hu$ représente le débit d'eau.

3. Intégration numérique

Nous présentons dans cette section l'intégration des équations par utilisation des techniques de volumes finis et de solveurs de Riemann.

3.1. Le maillage

On considère un écoulement unidimensionnel

sur une longueur L .

L'intervalle $[0,L]$ est subdivisé en

N segments de même amplitude $\Delta x = \frac{L}{N}$.

On obtient alors une suite de points $(x_j)_{j \in J = \{0, \dots, N\}}$ définis par : $x_j = j\Delta x$. On pose :

Un solveur HLLT pour les équations de Saint-Venant et traitement des confluences et des inondations.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), \quad j \in \{0,1,\dots,N-1\} \\ C_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}; x_{j+\frac{1}{2}} \right], \quad j \in \{1,\dots,N-1\} \\ C_0 = \left[x_0; x_{\frac{1}{2}} \right] \\ C_N = \left[x_{N-\frac{1}{2}}; x_N \right] \end{array} \right. \quad (3)$$

Pour la discrétisation temporelle, on se donne un pas de temps Δt et une suite d'instant $t^n = n\Delta t, \quad n \geq 0$.

3.2. Un schéma de type Godunov

La topographie a du problème (2) est approchée par des valeurs discrètes $a_j, j \in J$:

En posant :

$$a_j \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} a(x) dx \quad (4)$$

$$a_\Delta(x) = \sum a_j \chi_j(x), \quad (5)$$

avec $\chi_j(x) = 1$ si $x \in C_j$ et $\chi_j(x) = 0$ sinon, le système (2) est approché par :

Posons $w = \begin{pmatrix} h \\ q \\ a_\Delta \end{pmatrix}$. La méthode des volumes finis repose sur le fait qu'à chaque instant, la solution

w est constante par cellule. Nous définissons la moyenne de w sur chaque cellule C_j :

$$w_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} w dx \quad (7)$$

Puisque, sur chaque cellule C_j , $\frac{\partial a_\Delta}{\partial x} = 0$, l'intégration de (6) sur C_j nous donne :

$$\int_{C_j} \frac{\partial w}{\partial t} dx + \int_{C_j} \frac{\partial F(w)}{\partial x} dx = 0$$

soit

$$\frac{dw_j}{dt} + \left\{ F \left(w(x_{j-\frac{1}{2}}^-, t) \right) - F \left(w(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t) \right) \right\} = 0 \quad (8)$$

où $F(w) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ 0 \end{pmatrix}$; x^- et x^+ désignant respectivement les limites à gauche et à droite de

x .

Partant de la solution $w(x, t^n)$ à l'instant t^n , le calcul de $w\left(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t\right)$ et $w\left(x_{j-\frac{1}{2}}^+, t\right)$ pour $t \in [t^n, t^{n+1}]$ est donné par la résolution du problème de Riemann suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + gh \frac{\partial a_\Delta}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial a_\Delta}{\partial t} & = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$w(x, t^n) = \begin{cases} w_L, & \text{si } x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ w_R, & \text{si } x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} ; \quad a_\Delta(x) = \begin{cases} a_L, & \text{si } x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ a_R, & \text{si } x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

où $w_L = w_j^n$ et $w_R = w_{j+1}^n$.

Désignons par $w_{j+\frac{1}{2}}^n(x/t; w_L, w_R)$ la solution autosimilaire de (9).

On définit deux flux :

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} = F\left(w_{j+\frac{1}{2}}^n(0^-; w_L, w_R)\right) \quad \text{et} \quad F_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} = F\left(w_{j+\frac{1}{2}}^n(0^+; w_L, w_R)\right)$$

correspondant à chaque côté de l'interface de $x_{j+\frac{1}{2}}$.

Enfin, par le schéma d'Euler explicite, nous discrétisons l'équation (8). Nous obtenons alors le schéma numérique suivant :

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+\frac{1}{2}}^{n,-} - F_{j+\frac{1}{2}}^{n,+} \right) \quad (10)$$

4. CALCUL DU FLUX NUMERIQUE A TRAVERS LES INTERFACES DES CELLULES

4.1. Problème de Riemann

On se donne un état w_L "à gauche" et un état w_R à droite. Localement (entre les deux états w_L et w_R), la topographie peut être considérée comme plate et l'on cherche alors une solution du problème de Riemann :

$$\mathfrak{R}(w_L, w_R) : \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = \begin{cases} w_L, si x < 0 \\ w_R, si x > 0 \end{cases}; a_\Delta(x) = \begin{cases} a_L, si x < 0 \\ a_R, si x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

En dehors des zones sèches ($h > 0$), l'EDP de (11) est équivalent à :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + A(Y) \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

où pour $w = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ a_\Delta \end{pmatrix}$, on a posé : $Y(w) = \begin{pmatrix} 2c \\ u \\ v \end{pmatrix}$, $c = \sqrt{gh}$.

$A = \begin{pmatrix} u & c & 0 \\ c & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de Y .

Puisque $h > 0$, $A(Y)$ possède trois valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\lambda_1(Y) = u - c, \quad \lambda_2(Y) = 0, \quad \lambda_3(Y) = u + c. \quad (13)$$

Pour construire une solution (faible, entropique, autosemblable) $w\left(\frac{x}{t}, w_L, w_R\right)$ du problème $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$ nous allons chercher deux états intermédiaires w_1 et w_2 tels que (FIG. 1) :

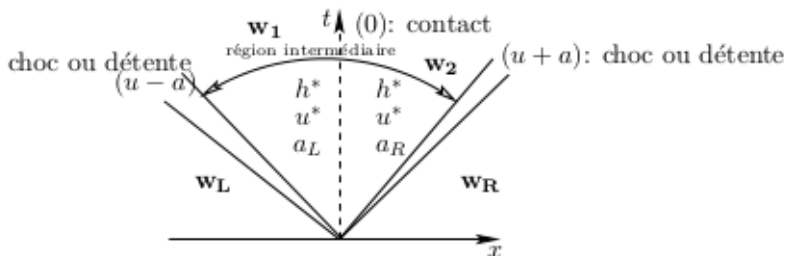


Figure 1 : Structure de la solution du problème de Riemann dans le plan (x, t)

$$\left. \begin{aligned} (a) : w_1 \text{ est issu de } w_L \text{ par une 1 - onde (choc ou détente)} \\ (b) : w_1 \text{ et } w_2 \text{ sont reliée par une 2 - discontinuité de contact} \\ (c) : w_2 \text{ abouti à } w_R \text{ par une 3 - onde (choc ou détente)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

■ Analyse du problème

Shallow water est le cas particulier des équations d'Euler où le rapport des chaleurs spécifiques du fluide vaut $\gamma = 2$. L'analyse du problème de Riemann est classique et conduit aux résultats suivants [12] :

Comme w_1 et w_2 sont reliés par une 2-discontinuité de contact, alors ils ont une hauteur commune h^* et une vitesse commune u^* .

- w_1 étant issu de w_L par une 1-onde alors :

$$u^* = \begin{cases} u_L - 2 \left(\sqrt{gh^*} - \sqrt{gh_L} \right), \text{ si } h^* \leq h_L \text{ (détente)} \\ u_L - (h^* - h_L) \frac{\sqrt{g(h^* + h_L)}}{2h^* h_L}, \text{ si } h^* > h_L \text{ (choc)} \end{cases} \quad \text{et } a_1 = a_L. \quad (15)$$

- w_2 aboutissant à w_R par une 3-onde, alors :

$$u^* = \begin{cases} u_R + 2 \left(\sqrt{gh^*} - \sqrt{gh_R} \right), \text{ si } h^* \leq h_R \text{ (détente)} \\ u_L + (h^* - h_R) \frac{\sqrt{g(h^* + h_R)}}{2h^* h_R}, \text{ si } h^* > h_R \text{ (choc)} \end{cases} \quad \text{et } a_2 = a_R. \quad (16)$$

Ainsi, le problème de Riemann $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$ se réduit à la recherche de la hauteur h^* et de la vitesse u^* communes aux deux états intermédiaires w_1 et w_2 .

Proposition 1. La hauteur h^* de la zone intermédiaire est racine de l'équation :

$$f(h) = f_L(h) + f_R(h) + \Delta u = 0 \quad (17)$$

et la vitesse u^* de la zone intermédiaire est donnée par :

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[f_R(h^*) - f_L(h^*)] \quad (18)$$

où on a posé :

$$\Delta u = u_R - u_L \quad (19)$$

Un solveur HLLT pour les équations de Saint-Venant et traitement des confluences et des inondations.

$$F_L(h) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_L}), & \text{si } h \leq h_L \text{ (détente)} \\ (h - h_L) \frac{\sqrt{g(h + h_L)}}{2hh_L}, & \text{si } h > h_L \text{ (choc)} \end{cases} \quad (20)$$

$$F_R(h) = \begin{cases} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_R}), & \text{si } h \leq h_R \text{ (détente)} \\ (h - h_R) \frac{\sqrt{g(h + h_R)}}{2hh_R}, & \text{si } h > h_R \text{ (choc)} \end{cases} \quad (21)$$

Preuve 4.1.

Il y a quatre configurations possibles d'ondes (Figure 2):

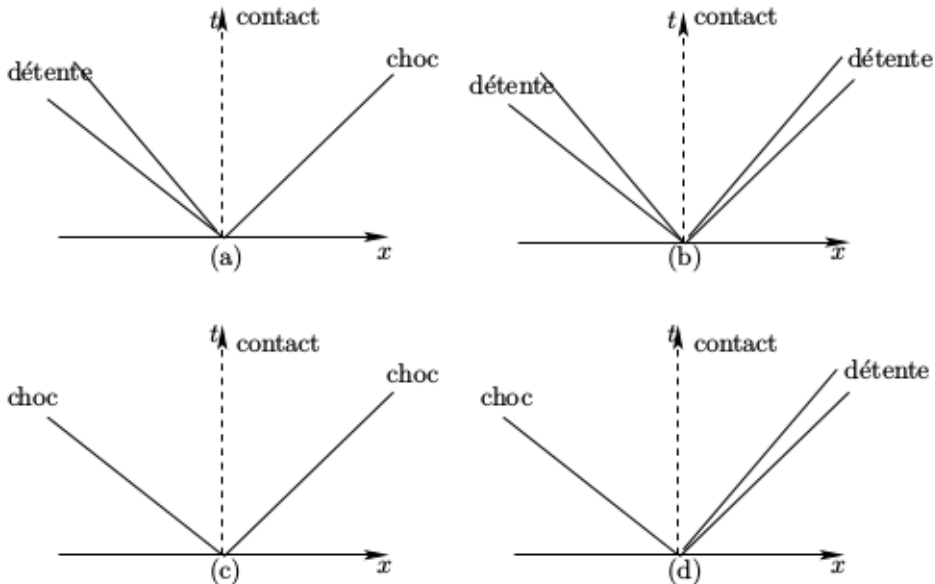


Figure 2 : Configurations possibles des ondes dans la solution du problème de Riemann

Nous ferons la preuve dans le cas (a). On pourra s'en inspirer pour (b), (c) et (d).

■ Cas (a)

D'après les relations (15) et (16), on a :

$$\begin{cases} u^* = u_L - 2(\sqrt{gh^*} - \sqrt{gh_L}), & \text{si } h^* \leq h_L \\ u^* = u_R + (h^* - h_R) \frac{\sqrt{g(h^* + h_R)}}{2h^* h_R}, & \text{si } h^* > h_R \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^* = u_L - 2f_L(h^*, h_L) & (\alpha) \\ u^* = u_R + 2f_R(h^*, h_R) & (\beta) \end{cases}$$

$$(\beta) - (\alpha) \Rightarrow f(h^*) \equiv f_L(h^*, h_L) + f_R(h^*, h_R) + \Delta u = 0$$

$$(\beta) + (\alpha) \Rightarrow u = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[f_R(h^*, h_R) - f_L(h^*, h_L)]$$

Proposition 2. L'équation (17), $f(h) = 0$, admet dans \mathbb{R}_+^* une unique solution h^* si, et seulement si :

$$u_R - u_L < 2(c_R + c_L) \quad (22)$$

où $c_K = \sqrt{gh_K}$, $K = L, R$.

Preuve 4.2. Etudions, sur $]0; +\infty[$, les variations de la fonction

$$f : h \mapsto f(h) = f_L(h) + f_R(h) + u_R - u_L.$$

$$f'_K(h) = \begin{cases} \sqrt{gh}, & \text{si } h < h_K \\ \frac{h}{\sqrt{2g(h_K^2 + hh_K + 2h^2)}}, & \text{si } h > h_K \\ \frac{4h\sqrt{hh_K(h + h_K)}}{4h\sqrt{hh_K(h + h_K)}}, & \text{si } h > h_K \end{cases}$$

• La fonction f_K , $K = L, R$, est continue, dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

(Remarque : La fonction f'_K exprimée sur se prolonge par continuité en h_K ; d'où la dérivabilité de f_K sur $]0; +\infty[$.)

$\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_K(h) > 0$. f est alors continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\bullet \begin{cases} \lim_{h \rightarrow +\infty} f_K(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (h - h_K) \frac{\sqrt{g(h + h_K)}}{2hh_K} = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} f_K(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gh_K}) = -2\sqrt{gh_K} \end{cases}$$

Par suite, on a :

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow +\infty} f(h) = +\infty \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = -2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + (u_R - u_L) \end{cases}$$

Un solveur HLLT pour les équations de Saint-Venant et traitement
des confluences et des inondations.

Au total : f est une bijection de IR_+^* sur $] -2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + (u_R - u_L); +\infty[$. En conséquence, pour que l'équation $f(h) = 0$ admette une solution dans IR_+^* , il faut et il suffit d'avoir $-2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + (u_R - u_L) < 0$, soit : $u_R - u_L < 2(c_L + c_R)$.

Note : Nous supposons dans toute la suite que la condition (22) est vérifiée par le couple d'états (w_L, w_R) . Dans le cas contraire, on prend $h^* = 0$.

Remarque 4.1. En général, on procède numériquement pour la résolution de l'équation (17) (recherche de h^*).

4.2. Heuristique de détermination de la hauteur de la région intermédiaire

On suppose la condition $u_R - u_L < 2(c_L + c_R)$ réunie et on cherche à construire une approximation de h^* , solution de (17) par une méthode itérative à deux pas.

Etape 1 : Recherche d'une première approximation

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + A(\hat{Y}) \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

On part d'une linéarisation de l'EDP de (11) :

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} 2c \\ u \\ a \end{pmatrix}; A(Y) = \begin{pmatrix} u & c & 0 \\ c & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; c = \sqrt{gh}, \hat{Y} = (Y_L, Y_R) \text{ est un état moyen dépendant}$$

uniquement des états $Y_L = Y(w_L)$ et $Y_R = Y(w_R)$. L'état \hat{Y} doit en plus vérifier la condition de consistance $\hat{Y}(Y_K, Y_K) = Y_K$. Nous prenons $\hat{Y} = \frac{Y_L + Y_R}{2}$.

En posant $F_0(Y) = A(\hat{Y})Y$, le système (23) se met sous la forme conservative suivante :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_0(Y) = 0 \quad (24)$$

$A(\hat{Y})$ admet trois valeurs propres réelles deux à deux distinctes :

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{u} - \hat{c}, \hat{\lambda}_2 = 0 \text{ et } \hat{\lambda}_3 = \hat{u} + \hat{c}$$

La solution du problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_0(Y) = 0 \\ Y(x,0) = \begin{cases} Y_L, & x < 0 \\ Y_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

se compose alors, dans le plan (x,t) , de trois états constants (Y_L, Y^*, Y_R) séparés par les

discontinuités de vitesses respectives $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ et $\hat{\lambda}_3$.

Les relations de Rankine-Hugoniot à travers la 1 et la 3-discontinuités s'écrivent :

$$F_0(Y_L) - F_0(Y^*) = \hat{\lambda}_1(Y_L - Y^*) \quad ; \quad F_0(Y_R) - F_0(Y^*) = \hat{\lambda}_3(Y_R - Y^*) \quad (26)$$

En explicitant les premières équations des deux systèmes de (26), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} (a) : \quad & \hat{u}(2c_L - 2c^*) + \hat{c}(u_L - u^*) = (\hat{u} - \hat{c})(2c_L - 2c^*) \\ (b) : \quad & \hat{u}(2c_R - 2c^*) + \hat{c}(u_R - u^*) = (\hat{u} + \hat{c})(2c_R - 2c^*) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} (b) - (a) \Rightarrow \quad & \hat{u}(2c_R - 2c_L) + \hat{c}(u_R - u_L) = \hat{u}(2c_R - 2c_L) + \hat{c}(2c_R + 2c_L) - 4\hat{c}c^* \\ \Rightarrow \quad & c^* = \frac{1}{2}(2c_R + 2c_L + u_L - u_R) \end{aligned}$$

Une première approximation de la hauteur de la région intermédiaire est donc :

$$h_0^* = \frac{1}{16g}(2c_R + 2c_L + u_L - u_R)^2 \quad (27)$$

Etape 2 : approximation de h^*

On compare h_0^* à h_L et h_R .

■ Premier cas : $h_0^* \leq \min(h_L, h_R)$

Dans ce cas, la région intermédiaire est connectée aux deux autres régions par une 1-détente et une 3-détente.

On en déduit : $f(h) = 2(c - c_L) + 2(c - c_R) + u_R - u_L$.

$$\begin{aligned} f(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad & c = \frac{1}{2}(c_L + c_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \\ \Rightarrow \quad & h = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2}(c_L + c_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \right]^2 \end{aligned}$$

On prend alors comme approximation de h^* :

$$h^* = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2}(c_L + c_R) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \right]^2 \quad (28)$$

■ Second cas : $h_0^* > \min(h_L, h_R)$

Dans ce cas, on fait l'hypothèse (ELEUTERIO F. et al, 2009) que la région intermédiaire est connectée aux deux autres régions par un 1-choc et un 3-choc.

On en déduit : $f(h) = (h - h_L) \frac{\sqrt{g(h+h_L)}}{2hh_L} + (h - h_R) \frac{\sqrt{g(h+h_R)}}{2hh_R} + u_R - u_L$.

On fait ensuite l'approximation

$$\frac{\sqrt{g(h+h_K)}}{2hh_K} \approx g_K(h_0^*) \equiv \frac{\sqrt{g(h_0^*+h_K)}}{2h_0^*h_K}, K=L,R \quad (29)$$

Ainsi :

$$f(h) = 0 \Rightarrow h = \frac{g_L(h_0^*)h_L + g_R(h_0^*)h_R + u_L - u_R}{g_L(h_0^*) + g_R(h_0^*)}$$

On prend alors comme approximation de h^* :

$$h^* = \frac{g_L(h_0^*)h_L + g_R(h_0^*)h_R + u_L - u_R}{g_L(h_0^*) + g_R(h_0^*)} \quad (30)$$

Maintenant que nous pouvons connaître l'état intermédiaire, nous développons dans la suite des méthodes permettant de calculer directement le flux numérique approché $\hat{F}(w_L, w_R)$ à travers l'interface $\frac{x}{t} = 0$.

4.3. Problème de Riemann et relations intégrales

Considérons le volume de contrôle $[x_L, x_R] \times [0, T]$ contenant toute la structure des ondes provenant de la résolution du problème de Riemann $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$.

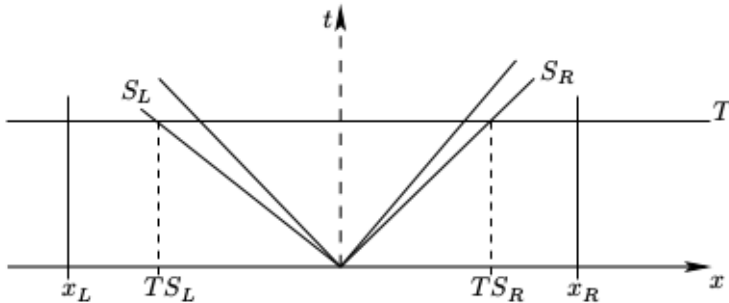


Figure 3 : Volume de contrôle $[x_L, x_R] \times [0, T]$ dans le plan (x, t) . S_L et S_R : vitesses des ondes les plus rapides provenant de la résolution de $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$.

En intégrant (RANDALL J. et al, 2002) sur le volume de contrôle $[x_L, x_R] \times [0, T]$, nous obtenons :

$$\int_{x_L}^{x_R} [w(x, T) - w(x, 0)] dx + \int_0^T [F(w(x_R, t)) - F(w(x_L, t))] dt = 0$$

- $$\int_{x_L}^{x_R} w(x, T) dx = \int_{x_L}^0 w(x, 0) dx + \int_0^{x_R} w(x, 0) dx - \int_0^T [F(w(x_R, t)) - F(w(x_L, t))] dt$$

$$= -x_L w_L + x_R w_R - \int_0^T [F(w(x_R, t)) - F(w(x_L, t))] dt$$

Or : $w(x_L, t) = w_L$ et $w(x_R, t) = w_R, \forall t \in [0, T]$ (Figure 3) .

En posant :

$$F_L = F(w_L) \quad ; \quad F_R = F(w_R) \quad (31)$$

nous avons :

$$\int_{x_L}^{x_R} w(x, T) dx = x_R w_R - x_L w_L - T(F_R - F_L) \quad (32)$$

- D'autre part :

$$\int_{x_L}^{x_R} w(x, T) dx = \int_{x_L}^{TS_L} w(x, T) dx + \int_{TS_L}^{TS_R} w(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} w(x, T) dx$$

$$= \int_{x_L}^{TS_L} w_L dx + \int_{TS_L}^{TS_R} w(x, T) dx + \int_{TS_R}^{x_R} w_R dx$$

$$\int_{x_L}^{x_R} w(x, T) dx = \int_{TS_L}^{TS_R} w(x, T) dx + (TS_L - x_L)w_L + (x_R - TS_R)w_R \quad (33)$$

nous obtenons ainsi :

En comparant les relations (32) et (33), nous obtenons une évaluation w_{hll} (ELEUTERIO F. et al, 2009) (proposée par Harten, Lax et Leer) de la moyenne de la solution w du problème de Riemann $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$ dans la région intermédiaire :

$$w_{hll} \equiv \frac{I}{TS_R - TS_L} \int_{TS_L}^{TS_R} w(x, T) dx = \frac{S_R w_R - S_L w_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (34)$$

4.4. Le solveur de Riemann approché HLL

Le solveur de Riemann approché HLL consiste à considérer que la solution du problème de Riemann $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$ se compose de trois états constants w_L , w_{hll} , w_R séparés par deux discontinuités de vitesses respectives S_L et S_R (à choisir convenablement par la suite).

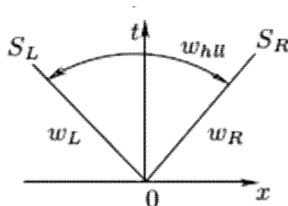


Figure 4 : Solveur de Riemann approché HLL

En utilisant les relations de saut de Rankine-Hugoniot à travers l'onde de vitesse S_L ou celle de vitesse S_R , nous obtenons le flux HLL :

$$F_{hll} \equiv F(w_{hll}) = F_L + S_L(w_{hll} - w_L) = F_R + S_R(w_{hll} - w_R) \quad (35)$$

$$F_{hll} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (w_R - w_L)}{S_R - S_L} \quad (36)$$

Dans le schéma numérique (10), le flux à travers l'interface entre w_L et w_R correspondant est alors :

$$\hat{F}_{hll} = \hat{F}_{hll}^+ = \begin{cases} F_L, & \text{si } S_L \geq 0 \\ \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (w_R - w_L)}{S_R - S_L}, & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & \text{si } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (37)$$

Remarque 4.2. Dans l'évaluation de w_{hll} (relation (34)), tout ce qui se passe est le calcul de la moyenne de la solution dans la région intermédiaire, sans tenir compte de la variation de la solution du problème de Riemann dans cette région du fait de la discontinuité topographique à travers l'onde de vitesse 0. La modification du solveur HLL afin de tenir compte de l'onde de Contact s'avère donc nécessaire.

4.5. Le solveur de Riemann approché HLLT

Le solveur approché HLLT que nous proposons est une modification du solveur HLL qui prend désormais en compte la présence de la discontinuité topographique dans la solution du problème de Riemann $\mathfrak{R}(w_L, w_R)$ ("T" étant mis pour Topographie).

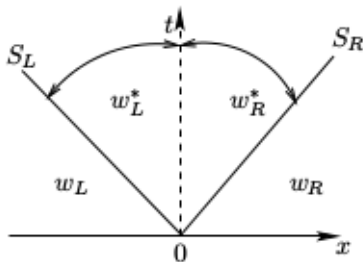


Figure 5 : Solveur de Riemann Approché HLLT

On suppose connues les vitesses d'ondes S_L et S_R .

Nous exploitons la proposition faite par Leveque (GEORGE D. L. et al 2006) : Le terme de topographie est directement incluse dans le flux à droite F_R^* de la région intermédiaire ; on applique toujours le même solveur HLL :

$$\tilde{F}_L^* = F_{hll} ; \tilde{F}_R^* = F_{hll} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g(h_L + h_R)(a_R - a_L) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Dans le schéma numérique (10), le flux à travers l'interface entre w_L et w_R correspondant est alors :

$$\begin{cases} \text{si } S_L \geq 0, & \hat{F}_{hll}^+ = \hat{F}_{hll}^- = F_L \\ \text{si } S_L \leq 0 \leq S^*, & \begin{cases} \hat{F}_{hll}^- = \tilde{F}_L^* \\ \hat{F}_{hll}^+ = \tilde{F}_R^* \end{cases} \\ \text{si } S_R \geq 0, & \hat{F}_{hll}^+ = \hat{F}_{hll}^- = F_R \end{cases} \quad (40)$$

4.6. Estimation des vitesses de discontinuité

S_L et S_R

On évalue tout d'abord la hauteur h^* de la région intermédiaire par l'heuristique proposée

à la section 4.2.

• Si $h^* \leq h_L$ (resp. $h^* \leq h_R$) alors l'état intermédiaire et l'état à gauche (resp l'état à droite) sont séparés par des détentes dont la plus rapide est celle de vitesse $u_L - c_L$ (resp. $u_R + c_R$). On prend dans ce cas :

$$S_L = u_L - c_L; \quad (\text{resp. } S_R = u_R + c_R).$$

• Si $h^* > h_L$ alors l'état intermédiaire et l'état à gauche sont séparés par un choc de vitesse (Relation de Rankine-Hugoniot) :

$$S = \frac{h_L u_L - h^* u^*}{h_L - h^*} = \frac{(h_L - h^*)u_L + (u_L - u^*)h^*}{h_L - h^*} = u_L + \frac{u_L - u^*}{h_L - h^*} h^*$$

D'autre part, d'après la relation (15), on a : $\frac{u_L - u^*}{h_L - h^*} = \frac{-\sqrt{g(h^* + h_L)}}{2h^* h_L}$.

Donc

$$\begin{aligned} S &= u_L - h^* \frac{\sqrt{g(h^* + h_L)}}{2h^* h_L} \\ &= u_L - \sqrt{\frac{(gh_L)(h^* + h_L)h^*}{2h_L^2}} \\ &= u_L - c_L \sqrt{\frac{(h^* + h_L)h^*}{2h_L^2}} \end{aligned}$$

On prend alors comme approximation de S_L :

$$S_L = u_L - c_L \sqrt{\frac{(h^* + h_L)h^*}{2h_L^2}}.$$

• Si $h^* > h_R$; en raisonnant comme précédemment avec l'état à droite w_R , on obtient :

$$S_R = u_R + c_R \sqrt{\frac{(h^* + h_R)h^*}{2h_R^2}}.$$

CONCLUSION

Pour l'estimation de S_L et S_R , on évalue h^* par l'heuristique proposée à la section 4.2 et on prend :

$$S_L = u_L - c_L q_L \quad ; \quad S_R = u_R + c_R q_R \tag{40}$$

$$\text{avec } q_K = \begin{cases} 1, & h^* \leq h_K \quad (\text{détente}) \\ \frac{1}{h_K} \sqrt{\frac{(h^* + h_K)h^*}{2}}, & h^* > h_K \quad (\text{choc}) \end{cases}, \quad K = L, R$$

5. Traitement des bancs-couvrants-découvrants

On se situe dans le cas où la hauteur de l'état w_R ou celle de w_L est nulle. Ici, du fait qu'une onde de choc ne peut pas être adjacente à un état sec (cf. Proposition 4.6.1 de (ELEUTERIO F. et al, 2009)), on a :

Si $h_K = 0$, $K = L, R$, alors l'état w_K est séparé de la région intermédiaire par une onde de détente. De plus l'onde la plus rapide de

cette détente a pour vitesse $S_L = u_R - 2c_R$, si $h_L = 0$ et $S_R = u_L + 2c_L$ si $h_R = 0$ (ELEUTERIO F. et al, 2009)

Il restera à déterminer la seconde vitesse S_K du solveur HLLT. Pour cela, nous proposons le calcul de la vitesse de la région intermédiaire par l'heuristique proposée à la section 4.2. Cela donne :

$$h^* = \frac{1}{16g}(2c_R - u_R)^2, \text{ si } h_L = 0 \text{ et } h^* = \frac{1}{16g}(2c_L + u_L)^2, \text{ si } h_R = 0.$$

La seconde vitesse est calculée comme à la section 4.6 :

$$S_L = u_L - c_L q_L \quad ; \quad S_R = u_R + c_R q_R$$

$$\text{avec } q_K = \begin{cases} 1, & h^* \leq h_K \quad (\text{détente}) \\ \frac{1}{h_K} \sqrt{\frac{(h^* + h_K)h^*}{2}}, & h^* > h_K \quad (\text{choc}) \end{cases}, \quad K = L, R$$

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

6.1. Ecoulements noyés

La longueur du domaine de calcul est $L = 25m$, le nombre de points du maillage $N = 1000$; la durée totale d'observation est $T = 1.2s$; les conditions initiales sont :

6.1.1. Test1 : Ecoulement sur fond plat

Le tableau suivant indique l'écoulement sans topographie :

	$0 \leq x \leq 12.5$	$12.5 \leq x \leq 25$
$h(x, t = 0)$	3	4
$u(x, t = 0)$	0	0

$a(x) = 0, \forall x \in [0;25]$; $CFL = 0.8$.

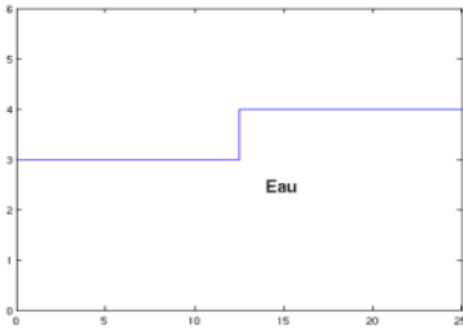


Figure 1-a : Test 1 (t=0s)

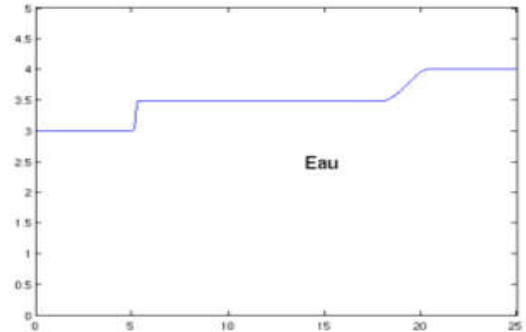


Figure 1-b : Test 1 (t=1.2s)

6.1.2. Test2 : Ecoulement avec topographie

Le tableau suivant indique l'écoulement avec topographie.

	$0 \leq x \leq 12.5$	$12.5 \leq x \leq 25$
$h(x, t = 0)$	5	4
$u(x, t = 0)$	0	0

$a(x) = 2$ sur $[0;12.5]$ et $a(x) = 0$ sur $[12.5;25]$; $CFL = 0.8$

Les figures 2-a et 2-b donnent une illustration du test 2 en t=0s et t=1.2s respectivement.

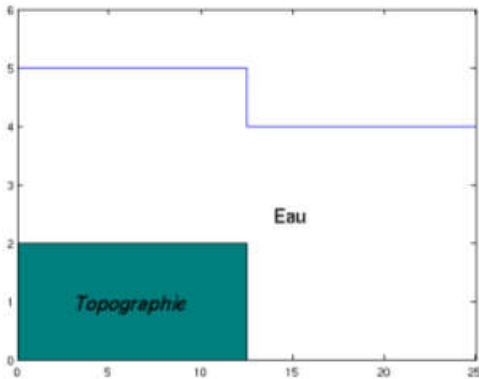


Figure 2-a : Test 2 (t=0s)

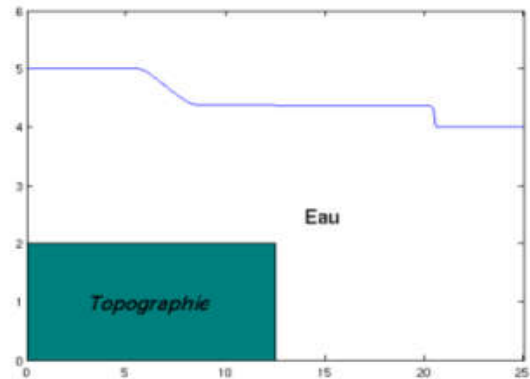


Figure 2-b : Test 2 (t=1.2s)

6.1.3. Test3 : Ecoulement avec topographie

Ce test est effectué avec une topographie $a(x)$ surélevée avant le barrage. La hauteur d'eau en aval du barrage est égale à la hauteur de la topographie $a(x)$ en amont du barrage.

	$0 \leq x \leq 12.5$	$12.5 \leq x \leq 25$
$h(x, t = 0)$	7	4
$u(x, t = 0)$	0	0

Un solveur HLLT pour les équations de Saint-Venant et traitement des confluences et des inondations.

$a(x) = 4$ sur $[0;12.5]$ et $a(x) = 0$ sur $[12.5;25]$; $CFL = 0.6$.

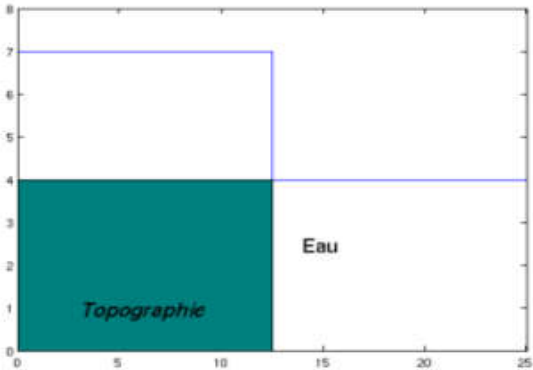


Figure 3-a : Test 3 (t=0s)

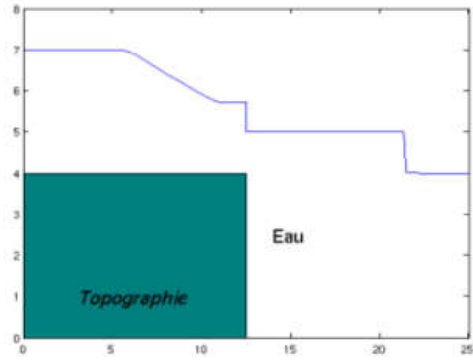


Figure 3-b : Test 3 (t=1.2s)

6.2. Bancs-couvrants-découvrants

La longueur du domaine de calcul est $L = 25m$, le nombre de points de maillage $N = 500$; la durée totale d'observation est T .

6.2.1. Test4 : Bancs-couvrants-découvrants

Ce test est effectué sur une topographie $a(x)$ surélevée après le barrage. La hauteur d'eau en aval du barrage est nulle :

	$0 \leq x \leq 12.5$	$12.5 \leq x \leq 25$
$h(x, t = 0)$	1.5	0
$u(x, t = 0)$	0	0

$a(x) = 0$ sur $[0;12.5]$ et $a(x) = 1$ sur $[12.5;25]$; $T = 2s$; $CFL = 0.4$.

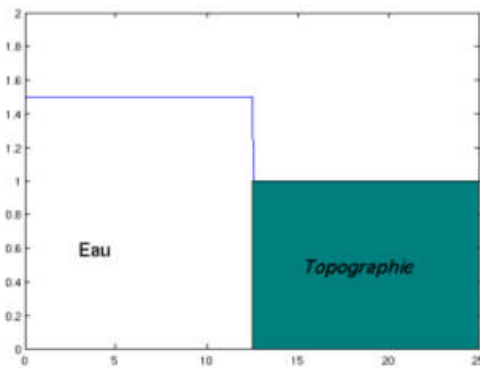


Figure 4-a : Test 4 (t=0s)

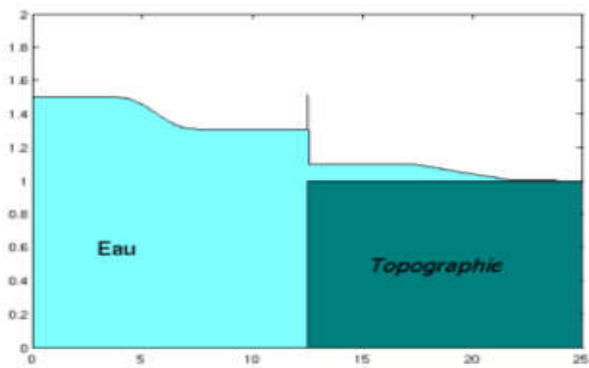


Figure 4-b : Test 4 (t=2s)

6.2.2. Test5 : Bancs-couvrants-découvrants

Ce test est effectué sur une topographie trapézoïdale $a(x)$ placée en aval du barrage et dont la partie supérieure est découverte :

	$0 \leq x \leq 7.5$	$7.5 \leq x \leq 10.5$	$10.5 \leq x \leq 14.5$	$14.5 \leq x \leq 25$
$h(x, t = 0)$	1	$0.1 - a(x)$	0	$0.1 - a(x)$
$u(x, t = 0)$	0	0	0	0

$a(x)$ (voir figure); $T = 3s$; $CFL = 0.4$.

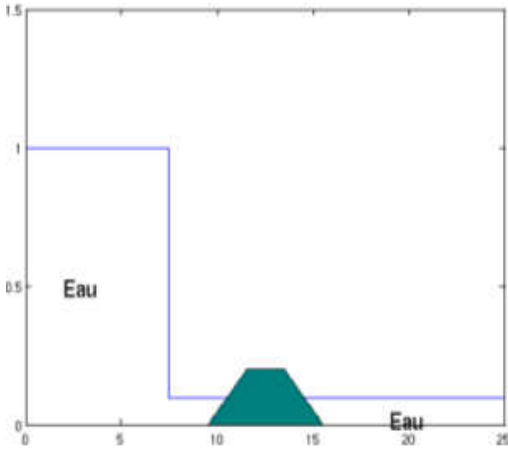


Figure 5-a : Test 5 (t=0s)

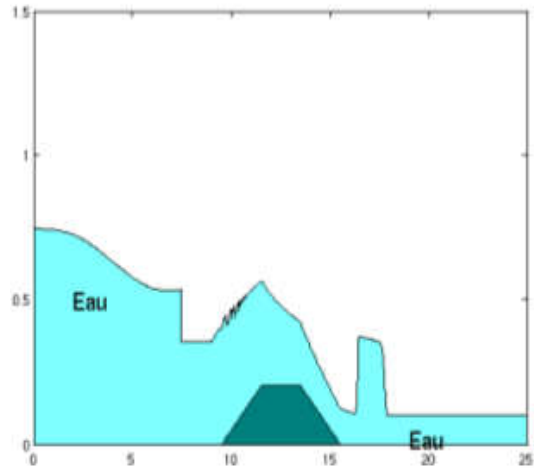


Figure 5-b : Test 5 (t=3s)

7. CONCLUSION

Exploitant les résultats de (GALLOUET Thierry et al, 2001 ; GALLOUET T. et al, 2002 ; BUFFARD Th, et al, 1998) nous avons présenté une formulation célérité-vitesse des équations de Saint-Venant. La méthode VFRoe conduit à la résolution, par interface du maillage spatial, d'un problème de Riemann. Notre contribution a été, en agissant sur les vitesses d'ondes, la construction d'un solveur de Riemann approché garantissant la préservation de la positivité de la célérité de l'état intermédiaire dans la résolution du

problème de Riemann. L'exploitation des résultats de (DAVID L. et al, 2004 ; RANDALL J. et al, 2002) nous a ensuite permis d'adapter le solveur afin de prendre en compte la simulation numérique des bancs-couvrants-découvrants. Le solveur de Riemann approché présenté dans ce rapport permet d'effectuer des simulations numériques des équations de Saint-Venant, même en présence de hauteurs d'eau nulle (recouvrement, découvrment). La prochaine étape de notre travail consistera à l'extension à des tests bidimensionnels.

REFERENCES

1. BERMUDEZ A., DERVIEUX A., DESIDERI J.-A. and VAZQUEZ CENDON M.E., 1998. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*,
2. BUFFARD Th., GALLOUET Th. and

- HERARD J.-M.. 1998. *Un schéma simple pour les équations de saint-venant*. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/gallouet/Publi/tg-art981-svt.pdf>.
3. CHINNAYYA A., LEROUX A.-Y. and SEGUIN N, 2004. A well-balanced numerical scheme for the approximation of shallow-water equations with topography: the resonance phenomenon. *International Journal on Finite Volume*, 1(1), 1-33.
4. GALLOUET T., HERARD J.-M. and SEGUIN N., 2002. Some recent finite volume schemes to compute euler equations using real gas eos. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 39, 1073-1138.
5. GALLOUET T., HERARD J.-M., and SEGUIN N., 2001. Some approximate godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computer and Fluid*.
6. GEORGE D. L. and LEVEQUE R.J., 2006. High resolution methods and adaptive refinement for tsunami propagation and inundation. In *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, Proc. 11'th Intl. Conf. on Hyperbolic Problems, page to appear*.
7. GEORGE D. L., 2004. Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow Water Equations with Topography and Dry Beds: A Godunov-Type Scheme. *PhD thesis, University of Washington*.
8. GODLEWSKI E. and RAVIARD P.-A., 1996. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systemes of Conservation Laws, pages 1-98*. Springer, New-York.
9. GUILLARD H. and ABGRALL R., 2001. *Modélisation numérique des fluides compressibles*. Gauthiers-villars.
10. LEBUNETEL J. and FARNOLE P., 2011. Impact de digues isc sur la dynamique littorale : Etude de cas des plages de saint-hilaire de riez en vende. *Revue Paralia*, 4 (9), 1-9.10.
11. LEVEQUE R.J., 2002. *Finite volume methods for hyperbolic problems, pages 203-252*. Cambridge University Press
12. ELEUTERIO F. T., 2009. *Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction*. Springer.