



## REPONSE DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE DE CHAUSSEE RIGIDE REPOSANT SUR UN SOL INERTE SOUS L'ACTION DU TRAFIC

**GIBIGAYE Mohamed<sup>a</sup>, YABI Crespin Prudence<sup>a</sup>,  
ALLOBA I. Ezéchiél<sup>a</sup>, DEGAN Gérard<sup>a</sup>**

<sup>a</sup> Ecole polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC), Université  
d'Abomey-Calavi (UAC), Republic of Benin.

[yabicrespin@yahoo.fr](mailto:yabicrespin@yahoo.fr)

### RESUME

*Cette étude traite de la réponse dynamique, sur la réponse dynamique d'une plaque de chaussée reposant sur un sol dont l'inertie est prise en compte, en vue d'un dimensionnement plus rationnel des chaussées rigides. Ainsi, la chaussée est modélisée comme une plaque mince de dimensions finies supportée par des barres longitudinales et transversales. Le sol support est de type Pasternak Vlassov inerte, et la charge est supposée ponctuelle à amplitude variable évoluant le long de l'axe central de la chaussée avec une accélération constante. L'équation gouvernante du problème est résolue en utilisant la méthode de Bolotin. Modifiée pour déterminer les fréquences naturelles du système et les nombres d'ondes du système et puis les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres pour trouver la réponse globale. En appliquant la charge au centre de la plaque, les résultats ont montré que les déplacements de la plaque ne sont pas nuls aux bords mais sont inférieurs à celui du centre la plaque. Par ailleurs, il est remarqué que la réponse de la plaque est retardée parallèlement à l'axe  $x$  à cause de l'effet de l'amortissement. Il est aussi remarqué qu'un gain considérable peut être obtenu en prenant en compte l'inertie du sol dans le dimensionnement de chaussée, car là l'inertie du sol réduit la réponse de la plaque.*



---

**Mots clés :** *Charge mobile, sol de Pasternak Vlassov inerte, plaque mince, Méthode de Bolotin modifiée, déflexion.*

## **ABSTRACT**

*This study deals with the soil inertia influence on the dynamic response of a plate for rigid pavements design. The pavement is modeled as a thin plate with finite dimensions supported by dowels and tie bars. The foundation soil is three-parameter one (Pasternak Vlasov soil type with the accounting of inertia). The moving traffic load is expressed as a concentrated load of harmonically varying magnitude, moving straight along the plate with a constant acceleration. The governing equation of the problem is solved using the Bolotin modified method. This allowed to determine the eigen frequencies and the wave numbers of the system. The dynamic response of the plate is obtained on the basis of orthogonality properties of eigen functions. By applying the load at the middle of the plate, the results showed that the displacements of the plate are not zero at the edges but are lower than that of the middle of the plate. Furthermore, it is noted that the response of the plate is delayed parallel to the x axis due to the effect of the damping. It is also notice that, some significant gains can be obtained by taking into account the soil inertia in roads engineering design because the soil inertia reduce the plate response.*

**Keys words:** *Moving load, Pasternak Vlasov inertia soil, thin plate, modified Bolotin method, deflection.*

## **1. INTRODUCTION**

L'épine dorsale d'une méthode rationnelle de dimensionnement de chaussée est le modèle mécanique utilisé pour définir sa structure (Wei Tu, 2007). Dans le cas des chaussées rigides, les modèles les plus utilisés sont le modèle multicouche élastique de Burmister (Laboratoire Central des Ponts et Chaussée [LCPC], 1994) et le



modèle basé sur l'utilisation des Eléments finis en supposant le sol support comme étant de type Winkler (Wei Tu, 2007; Baus & Stires, 2010). La méthode basée sur les éléments finis est lourde tandis que le système multicouche élastique n'est généralement pas considéré comme un outil approprié pour l'analyse de la réponse d'une chaussée rigide selon Ullidtz (Ullidtz, 1998). En effet, cette méthode peut conduire à des sous ou à des surdimensionnements avec pour corollaires soit des dégradations précoces, soit des difficultés liées à la mobilisation des financements en ce qui concerne les pays en voie de développement. Les modèles de dimensionnement des chaussées rigides existants, considèrent la charge généralement comme *statique* (Lu, 2007; Wei Tu, 2007; Baus & Stires, 2010; LCPC, 1994). Or, selon Sun et Greenberg (2000) cités par St-Laurent (St-Laurent, 2008), les charges du trafic sollicitant la chaussée, induisent des effets d'inertie que doit supporter ladite chaussée. Ainsi, le modèle statique de charge ne rend pas compte avec précision des conditions réelles de sollicitation de la chaussée (Lu, 2006). Au cours de la dernière décennie, beaucoup de chercheurs se sont penchés sur la question en supposant les charges comme étant dynamiques (Lu, 2006; Lu, 2007; Rahman & Anam, 2005). Par ailleurs, dans les travaux sus visés, les types de sol utilisés dans la modélisation de la structure sont des sols de type Winkler, Kelvin et des sols bi-paramétriques de Pasternak.

Quoique les modèles de Winkler et de Kelvin, présentent des résultats relativement simplifiés, ils ont de sérieuses limites (Rahman & Anam, 2005; Alisjahbana, 2009). Entre autre, on note la discontinuité des déplacements entre la partie chargée et celle non chargée. Selon le guide de dimensionnement (NCHRP, 2003), le modèle bi-paramétrique de Pasternak est désigné en 1998 comme l'option de sol préférable pour modéliser la fondation des chaussées. Alisjahbana (Alisjahbana, cwcs, 2009) s'est penché sur l'analyse dynamique d'une chaussée rigide sous charge mobile reposant sur un sol de type Pasternak. Ce modèle de sol est simple et intéressant mais la détermination des paramètres du sol est seulement basée sur le module d'élasticité et sur le coefficient de Poisson. Par contre le



modèle de Pasternak Vlassov tenant compte du décrétement logarithmique du sol a été utilisé par (Rahman & Anam, 2005) en utilisant la méthode des éléments finis. L'étude de Rahman, a montré par ailleurs que le modèle de Pasternak-Vlassov est plus économique que celui de Winkler et permet de ne pas fixer arbitrairement les valeurs des caractéristiques intrinsèques du sol.

Dans la plupart des modèles utilisés jusque-là, l'effet dynamique est pris en compte seulement par la force d'inertie de la plaque (Lu, ijss, 2001; NCHRP, 2003). Celle du sol est jusqu'à présent négligée dans la modélisation dynamique de la structure de chaussée. Mais selon une étude (Pan & Atluri, 1995), dans les pratiques de l'ingénierie, ce n'est toujours pas le cas, et ces facteurs peuvent avoir des effets importants sur la réponse dynamique de la plaque modélisant la chaussée. Pour ces raisons, plusieurs travaux ont cherché à modifier le sol de Pasternak Vlassov en introduisant l'inertie du sol jusqu'à une profondeur du sol sensible aux forces dynamiques appliquées à la structure. Gibigaye dans ces travaux, a utilisé un modèle de sol inerte en fondation pour l'étude du comportement des coques modélisant les conduites souterraines (Gibigaye, 1992). Il a conclu en précisant l'importance de la prise en compte de l'inertie du sol de fondation sur la réponse dynamique des structures de Génie civil. De même, Dimitrovov a dans ces travaux (Dimitrovova, 2012), a indiqué que la prise en compte de l'inertie influence la vitesse critique de la charge obtenue de façon expérimentale comparée à la vitesse obtenue avec le modèle de sol de Vlassov.

Ce travail étudie l'effet de l'inertie du sol sur la réponse dynamique d'une chaussée rigide. Pour ce faire, la chaussée rigide est modélisée comme une plaque mince avec des goujons en ses bords. Et pour prendre en compte son inertie, le sol est modélisé comme un sol tri paramétrique dérivé du sol de Pasternak Vlassov par la prise en compte de sa masse. Les conditions aux limites de ces plaques sont modélisées par deux relations linéaires entre les déformations et les sollicitations de la plaque en ses bords. La solution homogène du problème est obtenue par la méthode de séparation de variables, de



telle sorte que la superposition donne une solution satisfaisant les conditions aux limites. Puisque la déformée est exprimée comme des produits de fonctions propres, la solution du problème dynamique est obtenue sur la base des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres. La solution générale de la réponse de la plaque sous charge en mouvement dynamique sous forme intégrale est obtenue à partir des propriétés spécifiques de la fonction delta de Dirac, de sorte qu'il peut être en outre intégré pour obtenir les différentes équations de réaction de la plaque au cours de l'heure interne de la charge se déplace dans les limites de plaques. Ce document donne un aperçu de l'analyse de la réponse dynamique des chaussées routières rigides telle que décrit ci-dessus.

## 2. MATERIELS ET METHODES :

### Equation gouvernante :

Pour établir l'équation gouvernante plusieurs hypothèses ont été avancées. Ainsi la structure de la chaussée est considérée comme un ensemble de plaques minces de Love Kirchoff, homogènes, isotropes et soutenues longitudinalement par des goujons et latéralement par des barres de liaison ; le sol de fondation est supposé tri paramétrique de type Pasternak-Vlassov avec la prise en compte de l'inertie du sol de (Gibigaye & Pozhyev, 2005). Il exerce donc une force équivalente à :

$$q_s(x, y, t) = k_o w(x, y, t) - c_o \nabla^2 w(x, y, t) + m_o \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$$

(1)

Où,  $k_o$ ,  $C_o$  et  $m_o$  sont respectivement les caractéristiques intégrales en compression et au cisaillement du massif de fondation et la masse réduite linéique du massif de fondation, déterminées par Lvovskij et utilisé par Mehmet comme plusieurs travaux le notifient (Gibigaye & Pozhyev, 2005; Mehmet, 1993; Lvovsky, 1974) égale :



$$k_o = \frac{E_o}{2H_s(1-\nu^2)} \frac{\gamma(\gamma + \sinh \gamma \cosh \gamma)}{(\sinh \gamma)^2} \quad (2)$$

$$c_o = \frac{E_o H_s}{2(1+\nu)} \frac{\gamma(\sinh \gamma \cosh \gamma - \gamma)}{\gamma(\sinh \gamma)^2} \quad (3)$$

$$m_o = \frac{m H_s (\sinh \gamma \cosh \gamma - \gamma)}{2\gamma(\sinh \gamma)^2} \quad (4)$$

Où :  $H_s$ , l'épaisseur de la couche dynamiquement active du massif de fondation,  $m$ , la densité du sol de fondation et  $\gamma$  une constante appelée le décrément logarithmique du sol de fondation.

L'équation gouvernante du problème est donnée sous la forme de l'équation de Lagrange par :

$$D^4 w(x, y, t) + k_o w(x, y, t) - c_o \nabla^2 w(x, y, t) + \gamma h \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + (\rho h + m_o) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (5)$$

Avec,

$$p(x, y, t) = p_o(x, y, t) \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right] \delta[x - x(t)] \delta[y - y(t)]$$

, la charge transmise à la chaussée :

Où,  $x(t) = v_o t + \frac{1}{2} acc(t^2)$ ;  $y(t) = \frac{1}{2} b$ ;  $p_o$ , l'amplitude de la charge du trafic ;  $acc$ , l'accélération de la charge ;  $\omega$ , la fréquence angulaire de la charge appliquée ;  $\delta(\cdot)$  la fonction de Dirac ;  $a, b$ , les dimensions de la plaque finie.

o Conditions aux limites de la plaque goujonnée :

Les conditions aux limites représentées sur la figure 1 se modélisent donc ainsi qu'il suit :



- La restriction de la translation élastique verticale est matérialisée par les quatre équations suivantes:

$$Q_{x=0} = -D \frac{\partial \nabla^2 w(0, y, t)}{\partial x} = k s_{x1} w(0, y, t) \quad (6a)$$

$$Q_{x=a} = -D \frac{\partial \nabla^2 w(a, y, t)}{\partial x} = k s_{x2} w(a, y, t) \quad (6b)$$

$$Q_{y=0} = -D \frac{\partial \nabla^2 w(x, 0, t)}{\partial y} = k s_{y1} w(x, 0, t) \quad (6c)$$

$$Q_{y=b} = -D \frac{\partial \nabla^2 w(x, b, t)}{\partial y} = k s_{y2} w(x, b, t) \quad (6d)$$

- La restriction de la rotation élastique est matérialisée par les quatre équations suivantes :

$$M_{x=0} = -D \left[ \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(0, y, t)}{\partial y^2} \right] = k r_{x1} \frac{\partial \nabla^2 w(0, y, t)}{\partial x} \quad (7a)$$

$$M_{x=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(a, y, t)}{\partial y^2} \right] = k r_{x2} \frac{\partial \nabla^2 w(a, y, t)}{\partial x} \quad (7b)$$

$$M_{y=0} = -D \left[ \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial x^2} \right] = k r_{y1} \frac{\partial \nabla^2 w(x, 0, t)}{\partial y} \quad (7c)$$

$$M_{y=b} = -D \left[ \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, b, t)}{\partial x^2} \right] = kr_{y2} \frac{\partial \nabla^2 w(x, b, t)}{\partial y} \quad (7d)$$

En outre les conditions initiales ( $t = 0$ ) sont données par :

$$\frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = w(x, y, 0) = 0$$

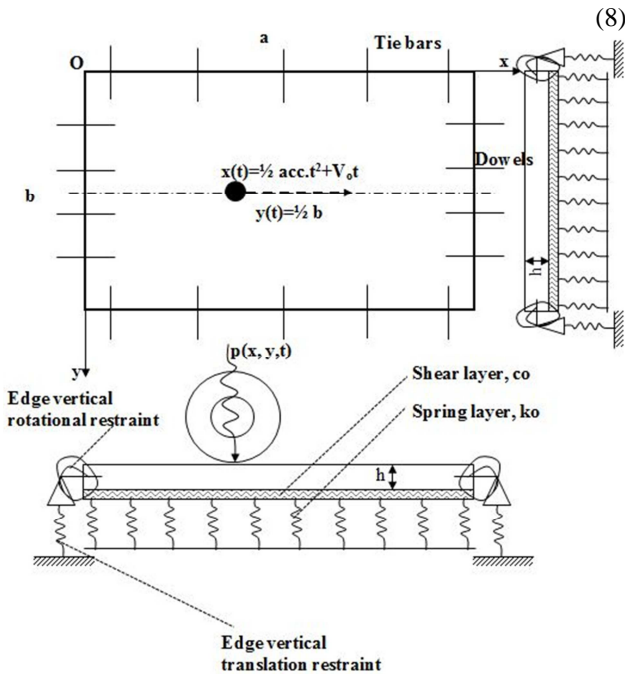


Figure 1 : Modélisation des chaussées rigides goujonnées sous charge mobile (Alisjahbana, 2009).



## 2.1 Résolution du problème :

### 2.1.1 Détermination de la fréquence propre

Pour résoudre l'équation gouvernante du problème, nous avons d'abord déterminé les fréquences et modes propres de la plaque comme beaucoup de travaux ont procédé (Rezaiguia, Ouelaa, Guyader, & Guenfoud, 2009; Alisjahbana, cwcs, 2009). Pour ce faire, nous avons essayé de résoudre l'équation des vibrations libres non amorties en utilisant la méthode modale, le déplacement vertical de la plaque en vibration libre est supposée égal à :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn} t) \quad (9)$$

Avec  $\omega_{mn}$  les fréquences circulaires et  $W_{mn}$ , une fonction des coordonnées de positions seulement ; correspondant au nombre de demi onde  $m$  et  $n$ . Cette forme vérifie déjà les conditions initiales du problème à vibrations libres non amorties.

Les modes propres vérifient donc l'équation :

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + k_o w(x, y, t) - c_o \nabla^2 w(x, y, t) + (\rho h + m_o) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Soit :

$$D\nabla^4 W_{mn} - (\rho h + m_o) \omega_{mn}^2 W_{mn} + k_o W_{mn} - c_o \nabla^2 W_{mn} = 0 \quad (11)$$

Cette équation est indépendante du temps tout comme la fonction  $W_{mn}$ . Un tel problème admet des solutions qui peuvent être sous la forme d'une fonction de Navier (Samul, 1982; Harberman, 1987).

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{p\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{b} y\right) \quad (12)$$



Ici,  $p$  et  $q$  sont les nombres de modes de la plaque. Ils sont des réels à cause des conditions aux limites (Xiang-sheng, 1987; Alisjahbana, 2009; Alisjahbana, 2004). Et  $m$ ,  $n$  leur arrondi respectif à l'entier le plus proche.

$$\omega_m^2 = \frac{D\pi^4}{\rho h + m_o} \left[ \left(\frac{p}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{pq}{ab}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^4 \right] + \frac{k_o}{\rho h + m_o} + \frac{c_o}{\rho h + m_o} \left[ \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \right] \quad (13)$$

## 2.2 Détermination des modes propres de la plaque

La méthode employée pour la détermination des nombres de mode  $p$  et  $q$ , et des modes propres de la plaque est celle de Bolotin modifiée, ainsi les modes propres de la plaque sont les solutions des **deux problèmes auxiliaires de Lévy**.

- **Premier problème auxiliaire type de Lévy**

Les solutions de l'équation (11) pour le premier problème auxiliaire satisfaisant les conditions aux limites objets des équations (6a) ; (6b) ; (7a) ; (7b) peuvent être exprimées comme :

$$W(x, y) = X(x) \sin\left(\frac{q\pi}{b} y\right) \quad (14)$$

Avec  $X(x)$ , le mode propre de la plaque dans la direction  $Ox$ .

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \left[ 2\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + \frac{c_o}{D} \right] \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \left[ \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + \frac{c_o}{D} \right] X(x) = 0 \quad (15)$$

Les solutions de l'équation caractéristique de l'équation (15) sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\pi}{ab} \sqrt{2q^2 a^2 + p^2 b^2 + \frac{c_o a^2 b^2}{D\pi^2}} \quad \text{and} \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{p\pi}{a} i \quad (16)$$



Pour  $\beta = \sqrt{2q^2 a^2 + p^2 b^2 + \frac{c_o a^2 b^2}{D\pi^2}}$ ,  $X(x)$  devient :

$$X(x) = A_1 \cosh\left(\frac{\beta\pi}{ab} x\right) + A_2 \sinh\left(\frac{\beta\pi}{ab} x\right) + A_3 \cos\left(\frac{p\pi}{a} x\right) + A_4 \sin\left(\frac{p\pi}{a} x\right) \quad (17)$$

L'équation (17) donne la forme générale du mode propre de la plaque suivant la direction Ox. L'application des conditions aux limites suivant l'axe Ox permet d'avoir les coefficients  $A_i$ .

$$\begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 + a_{14}A_4 = 0 \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 + a_{24}A_4 = 0 \\ a_{31}A_1 + a_{32}A_2 + a_{33}A_3 + a_{34}A_4 = 0 \\ a_{41}A_1 + a_{42}A_2 + a_{43}A_3 + a_{44}A_4 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Où les coefficients  $a_{ij}$  sont donnés par :

$$a_{11} = ks_{x1}; \quad a_{12} = D\left(\frac{p\pi}{a}\right)^3 - D\left(\frac{\beta\pi}{ab}\right)\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2; \quad a_{13} = ks_{x1};$$

$$a_{14} = -\left[ D\left(\frac{p\pi}{a}\right)^3 + D\left(\frac{p\pi}{a}\right)\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2 \right];$$

$$a_{21} = a_{12} \sinh\left(\frac{\beta\pi}{b}\right) + ks_{x1} \sinh\left(\frac{\beta\pi}{b}\right);$$

$$a_{22} = a_{12} \cosh\left(\frac{\beta\pi}{b}\right) + ks_{x1} \sinh\left(\frac{\beta\pi}{b}\right);$$

$$a_{23} = -a_{14} \sin(p\pi) + ks_{x1} \cos(p\pi);$$

$$a_{24} = -a_{14} \cos(p\pi) + ks_{x1} \sin(p\pi);$$



$$a_{31} = D \left( \frac{\beta\pi}{ab} \right)^2 - \nu D \left( \frac{q\pi}{b} \right)^2; \quad a_{32} = kr_{x1} \left( \frac{\beta\pi}{ab} \right);$$

$$a_{33} = - \left[ D \left( \frac{p\pi}{a} \right)^2 + \nu D \left( \frac{q\pi}{b} \right)^2 \right];$$

$$a_{34} = kr_{x1} \left( \frac{p\pi}{a} \right);$$

$$a_{41} = a_{32} \cosh \left( \frac{\beta\pi}{b} \right) + kr_{x1} \left( \frac{\beta\pi}{ab} \right) \sinh \left( \frac{\beta\pi}{b} \right);$$

$$a_{42} = a_{32} \sinh \left( \frac{\beta\pi}{b} \right) + kr_{x1} \left( \frac{\beta\pi}{ab} \right) \cosh \left( \frac{\beta\pi}{b} \right);$$

$$a_{43} = a_{34} \cosh (p\pi) - a_{34} \sinh (p\pi)$$

$$a_{44} = a_{33} \sinh (p\pi) - a_{33} \cosh (p\pi).$$

Pour ne pas avoir une solution triviale, il est nécessaire de poser le déterminant de la matrice des coefficients de ce système d'équation nul, soit :

$$Det\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

• **Deuxième problème auxiliaire type de Lévy**

Les solutions de l'équation (11) pour le premier problème auxiliaire satisfaisant les conditions aux limites objets des équations (6c) ; (6d) ; (7c) ; (7d) peuvent est exprimées comme :



$$W(x, y) = Y(y) \sin\left(\frac{p\pi}{a} x\right) \quad (20)$$

avec  $Y(y)$ , le mode propre de la plaque dans la direction Oy de la plaque. En substituant l'équation (20) dans équation (11) on obtient une équation différentielle ordinaire pour  $Y(y)$ .

$$\frac{d^4 Y(y)}{dy^4} - \left[ 2\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + \frac{c_o}{D} \right] \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \left[ \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 + \frac{c_o}{D} \right] Y(y) = 0 \quad (21)$$

Les solutions de l'équation (21) :

$$Y(x) = B_1 \cosh\left(\frac{\theta\pi}{ab} y\right) + B_2 \sinh\left(\frac{\theta\pi}{ab} y\right) + B_3 \cos\left(\frac{q\pi}{b} y\right) + B_4 \sin\left(\frac{q\pi}{b} y\right) \quad (22)$$

Les coefficients  $b_{ij}$  déterminés de manière analogue aux  $a_{ij}$  sont

donnés de manière à ce que où,  $\theta = \sqrt{2p^2 b^2 + q^2 a^2 + \frac{c_o a^2 b^2}{D\pi^2}}$ .

L'équation (22) donne la forme générale des modes propres de la plaque dans la direction Oy.

Les conditions aux limites des axes permettent de déterminer des coefficients  $B_i$  :

$$\begin{cases} b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3 + b_{14}B_4 = 0 \\ b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3 + b_{24}B_4 = 0 \\ b_{31}B_1 + b_{32}B_2 + b_{33}B_3 + b_{34}B_4 = 0 \\ b_{41}B_1 + b_{42}B_2 + b_{43}B_3 + b_{44}B_4 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

(23) Les coefficients  $b_{ij}$

sont déterminés de manière analogue à  $a_{ij}$ .

Afin d'obtenir une solution non trivial, il est nécessaire de poser le déterminant de l'équation (23) nul, soit :



$$\text{Det}\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

### 2.1.2 Détermination des nombres de mode :

Pour obtenir les couples  $\{p, q\}$  permettant d'avoir des solutions non triviales, on résout le système d'équations transcendantales formé des deux équations (19)-(24). Les solutions du système ne peuvent être obtenues analytiquement, ainsi nous avons utilisé le logiciel *Mathematica de Wolfram a version 8.0.0.1*.

La triangulation des deux systèmes d'équations a permis d'obtenir les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  après avoir normalisé  $A_1$  et  $B_1$  à 1.

Le mode propre de la plaque est donné donc par :

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn}(x) Y_{mn}(y) \quad (25)$$

### 2.1.3 Détermination de la fonction du temps $T_{mn}$ .

En posant la solution de notre équation gouvernante sous la forme :

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad (26)$$

Où  $W_{mn}$ , est une fonction des coordonnées spatiales appelée fonction modale ou mode propre de la plaque et  $T_{mn}$  une fonction du temps.

Ainsi, pour  $W_{mn}$  vérifiant l'équation (11), la fonction  $T_{mn}(t)$  vérifie l'équation suivante (Xiang-sheng, 1987; Harberman, 1987) :



$$\ddot{T}_{mn}(t) + 2\alpha\omega_{mn}\dot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{\int_0^a \int_0^b W(x, y) p(x, y, t) dx dy}{(\rho h + m_o) \int_0^a \int_0^b [W(x, y)]^2 dx dy} \quad (27)$$

Avec  $2\alpha\omega_{mn} = \frac{\gamma h}{\rho h + m_o}$  les solutions de l'équation homogène correspondante sont de la forme :

$$T_{0mn}(t) = e^{-\alpha\omega_{mn}t} \left[ a_{mn} \cos\left(\omega_{mn} \sqrt{1-\alpha^2} t\right) + b_{mn} \sin\left(\omega_{mn} \sqrt{1-\alpha^2} t\right) \right] \quad (28)$$

Avec, les conditions initiales précédemment définies, on obtient  $a_{mn} = b_{mn} = T_{0mn} = 0$

Une solution particulière de cette équation est donnée par :

$$T_{mn}(t) = \frac{P_o Y_{mn} \left(\frac{1}{2}b\right)}{(\rho h + m_o) Q_{mn} \omega_{mn} \sqrt{1-\alpha^2}} \int_0^t \left[ \left(1 + \frac{1}{2} \cos(\omega\tau)\right) X_{mn} \left(\frac{1}{2}acc.\tau^2 + v_o.\tau\right) e^{-\alpha.\omega_{mn}(t-\tau)} \sin\left(\omega_{mn} \sqrt{1-\alpha^2}(t-\tau)\right) \right] d\tau \quad (29)$$

Où,

$$Q_{mn} = \int_0^a \int_0^b [X_{mn}(x)]^2 [Y_{mn}(y)]^2 dx dy \quad (30)$$

En définitive, le déplacement solution de l'équation est de la forme :

### 3. APPLICATIONS NUMERIQUES, RESULTATS ET DISCUSSIONS

En utilisant la procédure décrite précédemment, une chaussée rigide soumise à une charge dynamique du trafic est analysée. Dans ce travail, une plaque rectangulaire goujonnée en ces bords est considérée comme montré sur la figure 1. Les propriétés structurales de la plaque incluent les dimensions 5 m x 3.5m, l'épaisseur 0.25 m et les caractéristiques physiques de la plaque telle que la densité



$\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , le module d'élasticité longitudinale  $E_p = 24.10^9 \text{ Pa}$ . La densité du sol est prise égale à  $m = 1800 \text{ kg.m}^{-3}$ , avec un coefficient de Poisson  $\nu_s = 0.35$  et un module d'élasticité  $E = 50.10^6 \text{ Pa}$ . Enfin la charge considérée roulante est d'intensité  $P_0 = 80.10^3 \text{ N}$  avec une fréquence circulaire  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , une accélération de  $acc = 2 \text{ m.s}^{-2}$ , et une vitesse de  $V_0 = 25 \text{ m.s}^{-1}$  (Alisjahbana, cwcs, 2009). Ces paramètres sont les propriétés des matériaux et des structures typiques de la bibliothèque des matériaux de SETRA (LCPC, 1994). Aussi a-t-on supposé un coefficient d'amortissement du système égal à  $\alpha = 10\%$  (Alisjahbana, 2009).

Pour des besoins de comparaison nous avons convenu de considérer trois types de sol : (i) le sol de type Pasternak, (ii) le sol de type Pasternak Vlassov et (iii) le sol de Pasternak Vlassov avec la prise en compte de son inertie (Tri-paramétrique).

### 3.1 Réponse dynamique de la plaque :

A partir des hypothèses précédentes, nous avons pu tracer les courbes de variation du déplacement en fonction des variables de position,  $x$ ,  $y$ .

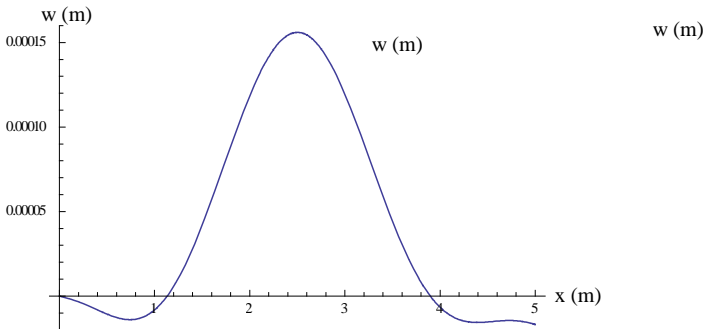


Figure 2 Déplacement de la plaque le long de l'axe  $y = 1,75\text{m}$  à  $t = 0,099603\text{s}$

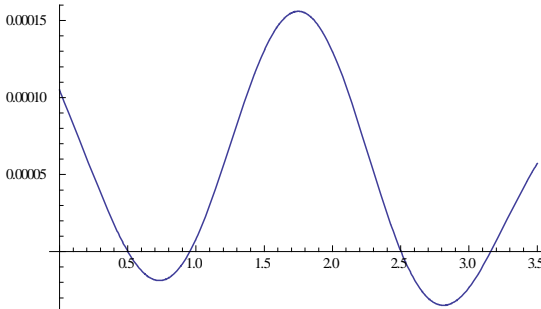


Figure 3 : Déplacement de la plaque le long de l'axe  $x = 2,5\text{m}$  à  $t = 0,099603\text{s}$

Une étude de ces deux courbes montre que la déflexion est plus au milieu central de la plaque qu'à ses bords. Toutefois le déplacement est non nul au niveau de ces bords. Ceci s'explique par le fait que les goujons et les barres de liaison résistent à toute déformation du bord de la plaque et limitent ainsi leur déplacement. On constate aussi qu'il n'est pas maximal sous la charge mais un peu en arrière de la charge ( $x=2,43\text{m}$  ;  $y=1,75\text{m}$ ). Ceci peut s'expliquer par le fait que l'amortissement du système retarde un peu la réponse dynamique de la plaque.

La figure 3 présente le déplacement de la plaque le long de l'axe  $x = 2,5\text{m}$  à  $t = 0,099603\text{s}$ . Au point central de cette ligne, aussi point d'application de la charge à l'instant  $t = 0,099603\text{s}$ , nous constatons que le déplacement est maximal. Donc contrairement à la figure 2 où le déplacement est maximal derrière la charge, ici la déflexion est maximale directement sous la charge. Cela s'explique



par le fait que la charge ne se déplace que parallèlement à l'axe  $x$ . La position de la charge à n'importe quel temps par rapport à l'axe  $y$  est donc indépendante du temps.

### **3.2 Détermination de la profondeur du sol dynamiquement active :**

Nous basant sur les données énumérées plus haut, nous avons déterminé les cinq premiers nombres de mode de la plaque dans la direction des  $x$  et les cinq premiers nombres de mode de la plaque dans la direction  $y$ . Nous avons tracé les courbes de variation du déplacement en fonction des variables  $x$ ,  $y$ ,  $t$ .

La figure 4 présente les variations de la déflexion au centre de la plaque en fonction de la hauteur de sol dynamiquement active pour les trois types de sols. Ces courbes sont tracées pour une charge repérée au centre de la plaque.

Comme on le note sur la figure 4 pour le sol de Pasternak, la valeur de la déflexion de la plaque est constante quel que soit la profondeur considérée. Elle ne dépend pas de la hauteur du sol dynamiquement active. Par contre, pour le sol de Pasternak Vlassov et le sol Tri paramétrique, la déflexion croît pour atteindre une valeur maximale à une profondeur donnée ( $H_s=3,5\text{m}$  pour le sol de Vlassov et  $H_s=2,5\text{m}$  pour le sol tri paramétrique). On remarque aussi que l'écart entre les deux réponses croît avec la profondeur de sol dynamiquement active. On déduit de ces observations, que la profondeur de sol dynamiquement active influence grandement la réponse de la plaque.

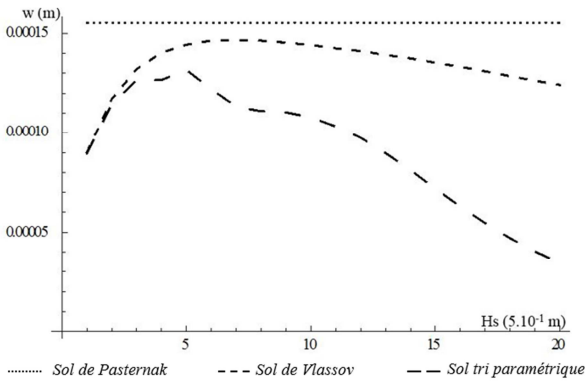


Figure 4: Variation de la déflexion au centre de la plaque ( $x = 2,5m$ ,  $y = 1,75m$ ) en fonction de la hauteur dynamiquement active de sol, pour différents types de sol au temps  $t = 0.099603s$  lorsque la charge est au centre de la plaque.

### 3.3 Influence de l'inertie du sol sur la réponse dynamique :

La Figure 5 présente les variations de la déflexion le long de l'axe central de la plaque de chaussée ( $y=1,75m$ ;  $0 \leq x \leq 5m$ ), pour différents types de sols, à l'instant  $t=0.099603s$  quand la charge mobile arrive au centre de la plaque ( $x=2,5m$  et  $y=1,75m$ ). Sur la figure, on constate que la déflexion est plus grande tout le long de la plaque en considérant le sol de Pasternak, comparée aux valeurs de la déflexion pour le sol tri-paramétrique. Les déflexions de la plaque quand le sol est de type Pasternak Vlassov, ont des valeurs comprises entre celles obtenues pour le sol tri paramétrique et le sol de Pasternak. En prenant les valeurs des déflexions de la plaque pour le sol de type Pasternak Vlassov, comme valeurs de référence, on constate que la déflexion de plaque de chaussée au centre de la plaque se réduit de 18,18%. Ce pourcentage de réduction est obtenue pour une valeur de  $H_s$  maximisant la déflexion pour le sol de type Vlassov ( $H_s=3.5m$ ). En prenant une valeur de  $H_s=3.5m$  pour les deux sols on a un écart de 29.5%. Plus  $H_s$  est grand plus l'écart est élevé. L'inertie du sol de fondation réduit grandement donc la

réponse dynamique de la plaque de chaussée lorsque la charge mobile se trouve au centre.

Par ailleurs, au temps  $t=0.099603s$ , le déplacement le long de l'axe central ( $y=1,75m$ ;  $0 \leq x \leq 5m$ ), de la plaque est maximal autour du point d'abscisse  $x=2,5m$ , valeur marquant la position de la charge à cet instant. On constate aussi qu'il n'est pas maximal sous la charge mais un peu en arrière de la charge (en  $x=2,43m$ ). Ceci peut s'expliquer par le fait que l'amortissement du système retarde la réponse dynamique de la plaque. D'où la réponse sous la charge se produit un peu après le passage de celle-ci. Cette constatation est faite aussi par un auteur (Lu, ijss, 2001; Lu, jam, 2007).

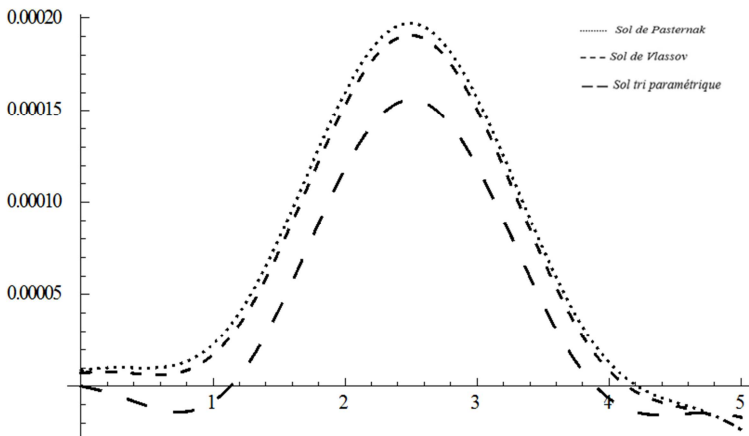


Figure 5: Variation de la déflexion le long de l'axe central de la plaque ( $0 \leq x \leq 5m$ ;  $y = 1.75m$ ), pour différents types de sols, au temps  $t = 0.099603s$  auquel la charge est repérée au centre de la plaque.

### 3.4 Variation de la déflexion en fonction du temps :

La Figure 4 traduit, pour le sol tri paramétrique, la variation de la déflexion sous la charge en fonction du temps. On constate que la déflexion de la plaque initialement, croit grandement avec des

oscillations rapides et à fortes amplitudes, jusqu'à l'instant  $t=8\text{ms}$ . Cette observation caractérise le domaine transitoire. Après cette phase, on note une stabilisation des oscillations et la plaque entre dans le domaine stationnaire où les oscillations sont à fréquence régulière.

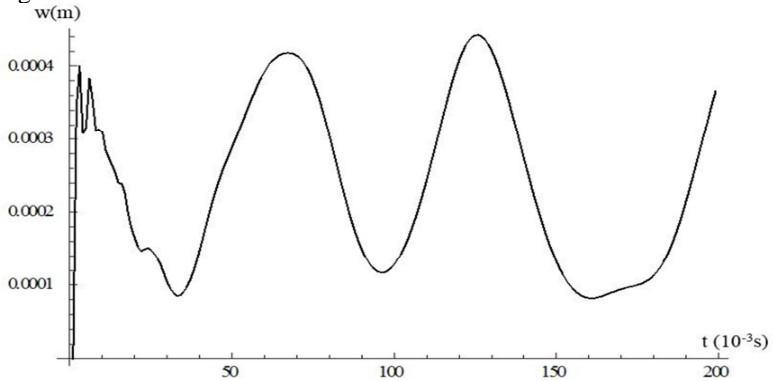


Figure 6: Variation de la déflexion directement sous charge, en fonction du temps pour une profondeur dynamiquement active de sol  $H_0=3.5\text{m}$

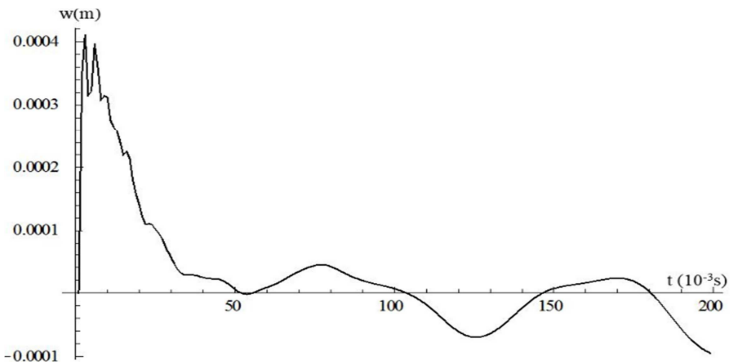




Figure 7: Variation de la déflexion au point fixe de coordonnées ( $x=0$ ;  $y=1.75m$ ), en fonction du temps pour une profondeur dynamiquement active de sol  $H_s=3,5m$ .

La figure 6 quant à elle présente, la variation de la déflexion en fonction du temps au point fixe de coordonnées  $x=0$  et  $y=1,75m$  au cours du déplacement de la charge le long de l'axe central de la plaque ( $x=0$  et  $y=1,75m$ ). On remarque que la déflexion est maximale au début de la sollicitation de la plaque et décroît en amplitude au fur et à mesure de l'éloignement de la charge. Ceci montre que la déflexion est maximale proche du point d'application de la charge.

#### 4. CONCLUSION

De cette étude il ressort que l'on dispose d'un modèle de calcul de la réponse dynamique d'une plaque de chaussée rigide goujonnée avec une prise en compte de l'inertie du sol. Aussi a-t-on pu mettre en exergue l'importance de l'inertie du sol de fondation dans l'étude dynamique des sols. Il ressort que la prise en compte de l'inertie du sol est utile lorsque la charge est supposée appliquée au centre de la plaque. Mais par la suite il serait important d'étudier le phénomène de résonance du système de même que les effets de la fréquence de la charge. Aussi faudra-il noter que cette étude ne couvre seulement que les plaques des chaussées reliées entre elles par des barres de liaison et goujon. On pourrait donc l'étendre aux plaques simplement supportées, aux plaques encastrées aux dalles et aux chaussées continues.

#### 5. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

6. Alisjahbana, S. (2004). Dynamic response of clamped orthotropic plates to dynamic moving loads. *13th World*



- 
- Conference on Earthquake Engineering*, (pp. 1-13). Vancouver B.C. Canada.
7. Alisjahbana, S. (2009, auguste 18). Dynamic of rigid roadway pavement under dynamic loads. *34th Conference on our World in Concrete and Structures*, (pp. 1-9). Singapore.
  8. Baus, R. L., & Stires, N. R. (2010). *Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide*. Carolina, USA.
  9. Dimitrova, Z. (2012). Enhanced formula for a critical velocity of a uniformly moving load. *Eccomas*.
  10. Gibigaye, M. (1992). *Les problèmes de la dynamique des coques au contact d'un milieu inerte, à l'étape non stationnaire des vibrations*. ZAPAROJIE: Institut Industriel de Zaparojie.
  11. Gibigaye, M., & Pozhyev, V. I. (2005). La déformation non stationnaire d'une conduite souterraine à paroi à trois couches sous l'action d'une charge mobile. *Annales de l'Université de Ouagadougou série C*, 003, 141-156.
  12. Harberman, R. (1987). *Elementary applied partial differential equations with Fourier serie and boundary value problem* (éd. 2ème). New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
  13. LCPC. (1994). *Conception et dimensionnement des chaussées neuves : Guide technique*. Ministère de l'équipement des transports et du tourisme.
  14. Lu, S. (2006). Analytical dynamic displacement response of rigid pavements to moving concentrated and line loads. *International Journal of Solids and structure*, 43(43 (2006) 4370-4383), 1-14. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.06.105
  15. Lu, S. (2007, Novembre). Steady-State Dynamic Response of a Kirchhoff's Slab on Viscoelastic Kelvin's Foundation to Moving Harmonic Loads. *Journal of Applied Mechanics*, 74(1212), 1212-1224. doi:10.1115/1.2744033
  16. Lvovsky, V. M., I., O. V., & V.I., P. (1974). Les oscillations stables d'une coque cylindrique dans un milieu élastique sous l'action d'une charge mobile. *Recueil : les questions de résistance et de plasticité*, pp. 98-110.



17. Mehmet, A. (1993). *Vertical vibration analysis of rigid footings on a soil layer with a rigid base*. Thèse, Faculty of Texas Technolgy University.
18. NCHRP. (2003). Structural response models for rigid pavements. Dans *Guide for Mechanistic-Empirical Design of new and rehabilitated pavement structures* (pp. 1-91).
19. Pan, G., & Atluri, S. N. (1995). Dynamic response of finite sized elastic runways subjected to moving loads: a coupled bem/fem approach. *International journal for numerical methods in engineering*, 38, 3143-3166.
20. Rahman, S. O., & Anam, I. (2005). Dynamic Analysis of Concrete Pavement under Moving Loads. *Journal of Civil and Environnemental Engineering*, 1(1, 2005), 1-6.
21. Rezaiguia, A., Ouelaa, N., Guyader, J., & Guenfoud, S. (2009). Détermination semi-analytique des fréquences et des modes propres d'une dalle de roulement d'un pont multi-travées. *3ème Congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques CMSM'2009*, (pp. 1-9). Hammamet.
22. Samul, I. V. (1982). *Les bases de la théorie de l'élasticité et de la plasticité : Ouvrage pédagogique destiné aux étudiants des ecoles supérieures* (éd. 2nd).
23. St-Laurent, D. (2008). *Synthèse des outils de modélisation de chaussées actuellement disponibles au LCPC*.
24. sun, L. (2005, Septembre). Dynamics of Plate Generated by Moving Harmonic Loads. 72, 1-6. doi:10.1115/1.1993669
25. Ullidtz, P. (1998). *Ullidtz, P., Modelling Flexible Pavement Response and Performance*,. Technical University of Denmark,, Polyteknisk Forlag,.
26. Wei Tu, M. S. (2007). *Response modelling of pavement subjected to dynamic surface loading based on stress-based multi-layered plate theory*. Thèse, Ohio State University.
27. Xiang-sheng, C. (1987, Avril ). Dynamic response of plates on elastic foundations due to the moving loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 8(4), 355-365.