

**Etude en régime de couche limite de la convection naturelle sur une surface verticale plongée dans un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-newtonien**

*Christian AKOWANOU\*, Gérard DEGAN\* & Norbert C. AWANOU\*\**

*\*Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquées (LEMA), Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi (EPAC), Université d'Abomey-Calavi (Bénin)*

*\*\*Laboratoire de Physique de Rayonnement (FAST), Université d'Abomey-Calavi (Bénin)*

**RESUME**

Une méthode intégrale est utilisée pour étudier l'écoulement convectif en régime de couche limite le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non-Newtonien. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité dont les axes du tenseur de perméabilité sont orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Une variation de la température de la surface en loi de puissance avec un exposant dépendant du type de chauffage est envisagée. Pour des nombres de Darcy-Rayleigh élevés, la solution au problème est obtenue en régime de couche limite basée sur une approche intégrale. Une analyse d'échelle est menée pour prédire les ordres de grandeur des variables d'intérêt. Il a été démontré que dans la matrice poreuse l'indice de viscosité du fluide non-Newtonien et les paramètres d'anisotropie affectent grandement le taux de transfert de chaleur.

**Mots clés :** milieux poreux, convection, anisotropie, fluide non-Newtonien

**ABSTRACT**

An integral method is used to study natural convection boundary layer flow along a vertical surface embedded in an anisotropic porous medium saturated by a non-Newtonian fluid. The porous medium is anisotropic in permeability with its principal axes oriented in a direction that is oblique to the gravity vector. A power-law variation of wall temperature is prescribed at the vertical plate. In the large modified Darcy-Rayleigh number limit a boundary layer solution based on the integral relations approach, is proposed. Scale analysis is applied to predict the order of magnitudes involved in the boundary layer regime. It is demonstrated that both the power law exponent and the anisotropic properties have a strong influence on the heat transfer rate.

**Key words :** porous media, convection, anisotropy, fluid non-Newtonian

---

**INTRODUCTION**

L'écoulement convectif le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide est d'un intérêt considérable dans plusieurs domaines en ingénierie. On peut citer entre autres applications l'extraction du pétrole, l'extraction de l'énergie géothermique, la diffusion souterraine des contaminants, les procédés de transformation alimentaire, la dispersion des contaminants chimiques dans l'environnement, les procédés de transformation des matériaux dans l'industrie chimique, la migration de l'humidité en isolation thermique et dans les greniers de stockage de grains, la pollution de la nappe souterraine, le stockage des déchets nucléaires etc... Dans une revue de communication, Cheng (1978) a présenté plusieurs travaux en géothermie portant sur l'étude du phénomène évoqué ci-dessus. Cheng & Minkowycz (1977) ont étudié les mouvements convectifs sur une surface semi-infinie bordant un milieu poreux. Sur la base des approximations de Darcy en régime de couche limite, la solution affine a été obtenue pour un profil de température de surface bien défini. Une analyse systématique pour des possibilités de solutions affines pour différents profils de température a été entreprise par Johnson & Cheng (1978). Seetharamu & Dutta (1990) ont examiné le même problème pour une température de surface variant comme une fonction de puissance de la position comptée à partir du bord d'attaque. Nakayama & Kayoma

(1987) ont utilisé une méthode intégrale pour analyser le phénomène de convection naturelle sur une surface verticale chauffée plongée dans un milieu poreux thermique stratifié. Les effets de la stratification thermique sur les taux locaux de transfert de chaleur ont été discutés. Plusieurs investigations du problème de même importance ont été conduites pour rechercher les effets des forces inertielles et des forces de volume qui ne sont pas prise en compte par le modèle de Darcy, mais qui deviennent importants dans les milieux de grande perméabilité. Hong *et coll.* (1985) ont recherché les effets des forces de volume et des forces inertielles résultant dans le modèle qu'ils ont adopté lors de l'étude du phénomène de convection naturelle dans un milieu poreux à grande perméabilité. Kaviany & Mittal (1987) ont aussi étudié analytiquement et expérimentalement le taux de transfert de chaleur sur une surface verticale chauffée isothermiquement et adjacente à un milieu poreux de grande perméabilité. Il ressort de toutes ces investigations que, aussi bien les forces de volume que les forces inertielles réduisent considérablement le taux de transfert de chaleur.

Dans toutes les publications citées ci-dessus, le fluide saturant le milieu poreux est supposé Newtonien. Cependant, dans la plupart des applications en ingénierie citées ci-dessus le fluide saturant le milieu poreux n'est pas toujours Newtonien. Par exemple, dans la littérature, le nombre de travaux relatifs à la convection thermique induite par une variation de température en milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien est très limité. A cet effet, Chen & Chen (1988) ont étudié numériquement la couche limite en convection naturelle le long d'une surface verticale chauffée isothermiquement et adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien. Récemment, Rastogi & Poulikakos (1995) ont étudié le phénomène de la double diffusion le long d'une surface verticale plongée dans un milieu poreux saturé par un fluide non-Newtonien. Il ressort de leur investigation que la variation de la température et la variation de la concentration, engendrent le long de la surface un flux constant de chaleur dont le transfert est grandement influencé par l'indice de viscosité du fluide.

De plus, dans les investigations précitées, le milieu poreux est supposé isotrope alors que dans plusieurs applications, les matériaux poreux sont anisotropes. L'étude des effets de l'anisotropie en perméabilité a été abordée pour la première fois par Castinel & Combarnous (1974). Cette étude portant sur les critères d'apparition des mouvements thermoconvectifs dans une couche horizontale chauffée par le bas a été poursuivie par d'autres auteurs comme Epherre (1975), McKibbin (1984). La convection naturelle dans un milieu poreux chauffé par le côté dont l'un des axes principaux est parallèle au champ gravitationnel a été étudiée par Kimura *et coll.* (1993). Degan et Vasseur (1996) ont étudié le même phénomène en considérant des axes principaux de perméabilité inclinés par rapport au champ gravitationnel. Il a été démontré par ces auteurs que les paramètres d'anisotropie en perméabilité affectent grandement le transfert de chaleur par convection.

Récemment par une méthode intégrale Ene (1991) a analysé les effets de l'anisotropie en perméabilité sur la couche limite en convection libre le long d'une surface verticale. Cette étude a été menée dans le cas où les axes principaux de perméabilité coïncident avec les axes de coordonnées. Vasseur & Degan (1998) ont aussi mené les mêmes investigations mais pour des axes de perméabilité orientés arbitrairement par rapport aux axes de coordonnées. Il ressort de leur analyse que si la perméabilité dans la direction perpendiculaire à la surface est supérieure à

celle orientée le long de cette surface il résulte un accroissement du champ de température.

La présente étude s'intéresse à la couche limite en régime convectif permanent au voisinage d'une surface verticale bordant un milieu poreux saturé par un fluide non-Newtonien. Par une méthode intégrale, la solution approchée du problème considéré a été obtenue dans le cas où la température le long de la surface varie comme une fonction de puissance de la distance comptée à partir du bord d'attaque de celle-ci. Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité avec des axes principaux de perméabilité orientés dans une direction oblique par rapport au champ gravitationnel. Se basant sur le modèle de Darcy modifié et proposé par Pascal (1983, 1986) et la loi de Darcy généralisée proposée par Bear (1972), l'écoulement du fluide non-Newtonien à travers la matrice du milieu poreux a été caractérisé. Dans la limite des nombres de Darcy-Rayleigh de valeurs élevées les équations de la couche limite ont été résolues analytiquement. Une analyse d'échelle a été menée précédemment à la résolution des équations. Cette analyse d'échelle prédit les ordres de grandeurs des variables d'intérêt du phénomène d'écoulement.

#### FORMULATION MATHÉMATIQUE

Dans la présente étude nous avons considéré une surface verticale adjacente à un milieu poreux anisotrope en perméabilité, chauffée en régime permanent. Le milieu poreux est saturé par un fluide à caractéristique rhéologique en loi de puissance. L'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport d'anisotropie  $\kappa^* = \kappa_1/\kappa_2$  et l'angle  $\theta$  que forme l'axe principal de perméabilité  $\kappa_2$  avec l'horizontale. Les axes de coordonnées  $x$  et  $y$  sont respectivement orientés dans les directions verticale et horizontale. Nous supposons qu'en tout point, le fluide et le milieu poreux sont en équilibre thermodynamique local. Les propriétés thermophysiques du fluide sont considérées constantes, indépendantes de la température à l'exception de l'approximation de Boussinesq.

En se basant sur le modèle de l'écoulement laminaire du fluide non Newtonien à travers le milieu poreux, la loi de Darcy généralisé s'écrit (Pascal, 1983 ; 1986) ; Bear (1972) :

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\mu_a} \nabla p \tag{1}$$

$$\mu_a = \varepsilon \left( u^2 + v^2 \right)^{(n-1)/2} \tag{2}$$

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{8^{(n+1)/2} \left( \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \gamma \right)^{(n-1)/2} (1+3n)^n} \tag{3}$$

La plupart des fluides intervenants dans les applications citées ci-dessus obéissent à un modèle rhéologique à caractéristique en loi de puissance dans laquelle le gradient de pression reste proportionnel au taux massique de fluide en écoulement.

Dans le modèle ci-dessus les paramètres rhéologiques  $\mu$  et  $n$  sont supposés indépendants de la température. Les équations traduisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour le problème considéré s'écrivent respectivement :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{4}$$

$$\vec{v} = -\frac{\bar{K}}{\mu_a}(\nabla p + \rho \vec{g}) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v}T - \alpha \nabla T) = 0 \quad (6)$$

$$\rho = \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty)] \quad (7)$$

Dans les équations ci-dessus  $\alpha = k / (\rho c)_f$  est la diffusivité thermique et  $\bar{K}$  le tenseur de perméabilité du milieu poreux. C'est un tenseur du second ordre qui se définit comme suit :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta & (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta \\ (K_1 - K_2) \cos \theta \sin \theta & K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

En prenant le rotationnel de la relation (5) et en utilisant l'équation (4) on élimine le terme de pression et l'on aboutit à l'équation du mouvement qui s'écrit :

$$a \frac{\partial u}{\partial y} + c \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - b \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu_a} \left\{ \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv) + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv) + K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \right\} \quad (9)$$

où

$$a = \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta ; b = \sin^2 \theta + K^* \cos^2 \theta ; c = \frac{1}{2} (1 - K^*) \sin 2\theta \quad (10)$$

#### ANALYSE D'ECHELLE

Dans ce paragraphe nous considérons le régime de couche limite pour lequel tout le mouvement du fluide est restreint à celui d'une mince couche d'épaisseur  $\delta$  existant le long de la surface verticale. Dans l'équation du mouvement (9) nous pouvons donc utiliser les hypothèses de couche limite qui ne sont valides que lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial y} \gg b \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial x} (-cu + bv) \quad (14)$$

$$K_1 \rho_\infty \beta g \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial \mu_a}{\partial y} (-au + cv) \quad (15)$$

Ainsi sur la base des approximations de couche limite et pour des nombres de Raleigh de valeurs élevées les équations deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (u^n) = \frac{n}{a} \frac{K_1 \rho_\infty \beta g}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (17)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (18)$$

Les conditions aux limites associées s'écrivent:

$$y = 0: \quad v = 0, \quad T = T_w = T_\infty + A x^\lambda \quad (19)$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u = 0, \quad T = T_\infty \quad (20)$$

où la température pariétale  $T_w$  prescrite est fonction de la position  $x$  comptée à partir du bord d'attaque de la surface,  $A$  et  $\lambda$  sont des constantes positives.  $T_\infty$  est la température dans le milieu poreux pour une position éloignée de la surface. Il a été démontré par Rastogi & Poulikakos (1995) que lorsque la surface est chauffée par un flux constant de chaleur  $\lambda = n/(2n+1)$  et dans le cas d'un chauffage isotherme  $\lambda = 0$ .

S'inspirant des travaux de Bejan (1984) et en adoptant  $H$  et  $\delta$  comme échelles caractéristiques de  $x$  et  $y$  dans les limites de la couche limite ( $\delta \ll H$ ) les équivalences requises par les équations de conservation (16), (17), et (18) s'écrivent :

$$\frac{u}{H} \sim \frac{v}{\delta} \quad (22)$$

$$a \frac{u}{\delta} \sim \frac{1}{\varepsilon u^{n-1}} K_1 \rho_\infty g \beta \frac{\Delta T}{\delta} \quad (23)$$

où  $\Delta T (= T_w - T_\infty)$  représente l'échelle de température. On constate que le gradient de température à travers la couche limite est d'ordre 1.

En recherchant les équivalences pour  $\delta$ ,  $u$  et  $v$  on obtient les résultats suivants :

$$\delta \sim H Ra_H^{-1/(2n)} a^{1/(2n)} \quad (24)$$

$$u \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/n} a^{-1/n} \quad (25)$$

$$v \sim \frac{\alpha}{H} Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (26)$$

où le nombre de Darcy-Rayleigh  $Ra_H$  basé sur la hauteur de la plaque est défini par:

$$Ra_H = \frac{K_1 \rho g \beta \Delta T H^n}{\varepsilon \alpha^n} \quad (27)$$

En définissant la fonction de courant  $\psi$  associée aux composantes de la vitesse de filtration par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (28)$$

l'équation de continuité (16) est automatiquement satisfaite. L'échelle caractéristique pour la fonction de courant se définit comme suit :

$$\psi \sim \alpha Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (29)$$

Le transfert de chaleur par pure conduction défini par le nombre de Nusselt local  $Nu_H$  a pour échelle caractéristique:

$$Nu_H = \frac{hH}{k} \sim Ra_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (30)$$

où  $h = q / (T_w - T_\infty)$  est le coefficient de transfert de chaleur local,  $q = -k / (\partial T / \partial y) \Big|_{y=0}$  le flux local de chaleur à travers la surface chauffée.

Dans le cas particulier d'un milieu isotrope ( $\kappa^* = 1$ , soit  $a = 1$ ), les échelles caractéristiques définies ci-dessus sont conformes à celles prédites par Rastogi & Poulikakos (1995) qui ont étudié la couche limite dans le problème de double diffusion le long d'une surface verticale plongée dans un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien.

Discutons à présent de la validité de cette analyse de couche limite. Les résultats précédents ne sont valides que si la couche limite est assez étroite ( $\delta \ll H$ ), soit  $Ra_H \gg a$ . Sur la base des équivalences (11)-(15) et (24)-(27), en utilisant les expressions établies dans l'analyse d'échelle conduite plus haut, les hypothèses de couche limite ne sont valides que si :

$$b \ll Ra_H^{1/n} a^{(n-1)/n} \quad (31)$$

$$c \ll Ra_H^{1/(2n)} a^{(2n-1)/(2n)} \quad (32)$$

### RESOLUTION

La méthode utilisée pour la résolution des équations gouvernantes (16)-(18) avec les conditions aux limites (19) et (20) est celle de Karman-Polhausen. Dans le développement, l'expression analytique du taux de transfert de chaleur à travers la surface est recherchée en fonction des paramètres qui régissent l'écoulement thermique.

En intégrant l'équation (17) de la position  $y = 0$  à  $y = Y$  (lisière de la couche limite démarquant la couche limite de la zone de courant libre) et en tenant compte des équations aux limites (19) et (20) on obtient :

$$u^n = \frac{n K_1 \rho_\infty g \beta}{a \varepsilon} (T - T_\infty) \quad (33)$$

L'équation d'énergie (18) sur la base de l'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x} (uT) + \frac{\partial}{\partial y} (vT) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (34)$$

Le courant libre étant immobile à partir de la lisière de la couche limite, alors nous pouvons écrire la relation  $(\partial / \partial y) \Big|_{y=\delta} = 0$ . L'intégration de l'équation (34) dans le domaine d'intérêt ( $\delta \times H$ ) donne:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta uT dy = -\alpha \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (35)$$

Substituant l'équation (33) dans l'équation (35), on obtient après arrangement:

$$-\alpha \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = \left( \frac{n K_1 \rho_\infty g \beta}{a \varepsilon} \right)^{1/n} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \Phi^{(n+1)/n} dy \quad (36)$$

où

$$\Phi = T - T_\infty.$$

En introduisant les transformations découlant de la précédente analyse d'échelle,

$$\Theta(\eta) = \frac{\Phi}{\Phi_w} \quad (37)$$

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (38)$$

L'équation (36) devient après quelques transformations algébriques

$$\frac{\delta}{x} = \left\{ \frac{2n}{(2n+1)\lambda+n} \frac{J}{I} n^{-1/n} \right\}^{1/2} Ra_x^{-1/(2n)} a^{1/(2n)} \quad (39)$$

où

$$J = -\Theta'(0) \quad (40)$$

$$I = \int_0^1 \Theta^{(n+1)/n}(\eta) d\eta \quad (41)$$

avec

$$Ra_x = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta A x^{\lambda+n}}{\varepsilon \alpha^n} \quad (42)$$

$Ra_x$  est le nombre de Rayleigh-Darcy modifié, basé sur la perméabilité  $\kappa_1$  et  $x$  la distance comptée à partir du bord d'attaque de la surface. On observe que le résultat (39) est en accord celui prédit par l'analyse d'échelle.

Les expressions de  $I$  et de  $J$  dépendent du profil de température réduite  $\Theta(\eta)$  qui demeure inconnu. Elles deviennent constantes dès que le profil de température est déterminé.

A cet effet le profil de température doit satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \Theta(0) = 1 & (a) \\ \Theta(1) = 0 & (b) \end{cases} \quad (43)$$

La méthode de recherche de la solution au problème consiste à choisir un profil de température  $\Theta$  avec les conditions aux limites (43) requises.

Il est évident que  $\Theta$  décroît de 1 à 0 lorsque  $\eta$  croît à partir de 0 pour différentes valeurs du paramètre d'anisotropie  $a$  et de l'indice de viscosité du fluide saturant le milieu. En désignant par  $\eta_\delta$  la valeur de  $\eta$  exprimée à  $y' = \delta'$  (à la lisière de la couche limite), nous trouvons à partir de l'équation (39) que  $\eta_\delta$  s'exprime de la façon suivante:

$$\eta_\delta = \left\{ \frac{2n}{(2n+1)\lambda+n} \frac{J}{I} n^{-1/n} \right\}^{1/2} a^{1/(2n)} \quad (44)$$

Le flux local de chaleur le long de la surface verticale devient:

$$q = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = k \frac{\Phi_w}{\delta} \left[ -\Theta'(0) \right] = k \frac{\Phi_w}{\delta} J \quad (45)$$

Ainsi combinant les équations (30), (39), et (45), le nombre de Nusselt local peut être réécrit :

$$Nu_x = \left\{ \frac{(2n+1)\lambda + n}{2n} I J n^{1/n} \right\}^{1/2} Ra_x^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (46)$$

Le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_{0-H}$  le long de la surface verticale de hauteur  $H$  est défini par:

$$\overline{Nu}_{0-H} = \overline{h}_{0-H} \frac{H}{k} \quad (47)$$

où

$$\overline{h}_{0-H} = \frac{\int_0^H q dx}{H(\overline{T_w} - T_\infty)} \quad (48)$$

et  $(\overline{T_w} - T_\infty)$  la moyenne de la différence de température le long de la surface.

Combinant les équations (39), (45) et (47), le nombre de Nusselt moyen peut se réécrire sous la forme :

$$\overline{Nu}_{0-H} = \left\{ \frac{2 n^{(n+1)/n} (1+\lambda)^{(2n+1)/n}}{(2n+1)\lambda + n} I J \right\}^{1/2} R_H^{1/(2n)} a^{-1/(2n)} \quad (49)$$

où

$$R_H = \frac{K_1 \rho_\infty g \beta (\overline{T_w} - T_\infty) H^n}{\alpha^n \varepsilon} \quad (50)$$

est le nombre de Darcy-Rayleigh basé sur la moyenne de la différence de température sur la surface verticale. Il est observé que les résultats obtenus sont conformes à ceux prédits par l'analyse d'échelle.

## RESULTATS ET DISCUSSION

A cause des conditions asymptotiques imposées, le profil de température approprié choisi au cours de cette étude pour l'expression de la distribution de température s'écrit:

$$\Theta(\eta) = 1 - \frac{17}{5} \eta + \frac{12}{5} \eta^2 \quad (51)$$

qui satisfait aux conditions aux limites (43). D'une part il est évident qu'en posant  $\lambda = 0$  (cas de la surface chauffée isothermiquement), pour un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien ( $n=1$ ) la présente solution soit conforme à celle obtenue par Cheng & Minkowycz (1977) lors de la résolution du problème de même importance par la méthode de similitude. D'autre part la présente solution est conforme à celle obtenue par Vasseur & Degan (1998) qui ont résolu entièrement les équations de la

couche limite en utilisant successivement une procédure numérique et une méthode de similitude dans le cas où le milieu poreux est anisotrope en perméabilité. Considérant le cas d'une surface chauffée par un flux constant de chaleur, Rastogi & Poulikakos (1995) ont montré que la valeur de  $\lambda$  dépend de l'indice de viscosité du fluide saturant le milieu poreux par la relation  $\lambda = n/(2n+1)$ . Par conséquent pour les fluides Newtoniens ( $n=1$ ) cette expression donne  $\lambda = 1/3$ ; valeur obtenue par Cheng & Minkowycz (1997).

La Figure 1 présente le nombre de Nusselt à travers le paramètre  $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$  en fonction du rapport d'anisotropie en perméabilité  $K^*$ , de l'angle d'inclinaison  $\theta$  des axes principaux de perméabilité dans le cas où la surface est chauffée isothermiquement ( $\lambda = 0$ ) et pour différentes valeurs de l'indice  $n$  de viscosité. Les résultats obtenus dans le cas du fluide Newtonien ( $n=1$ ) sont conformes à ceux obtenus par Vasseur & Degan (1998). En effet selon l'équation (46) on observe que  $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$  dépend du mode de chauffage c'est-à-dire du profil de température (à travers  $I$  et  $J$ ) et des paramètres d'anisotropie  $K^*, \theta$  à travers la constante  $a = \cos^2\theta + K^* \sin^2\theta$ . En général le même comportement est observé dans le cas où le milieu poreux est saturé par un fluide pseudoplastique ( $n = 0.5$ ) ou un fluide dilatant ( $n = 2$ ). Lorsque  $\theta = 0^\circ$  ( $a = 1$ ), la figure 1 indique que pour chaque valeur de  $n$ , le paramètre  $Nu_x/(Ra_x)^{1/(2n)}$  est constant et ne dépend pas de  $K^*$ . Dans cette situation, le nombre de Nusselt local en régime de couche limite dépend uniquement du nombre de Rayleigh local  $Ra_x$  basé sur la perméabilité  $K_I$  dont l'axe est parallèle à la direction de la surface.

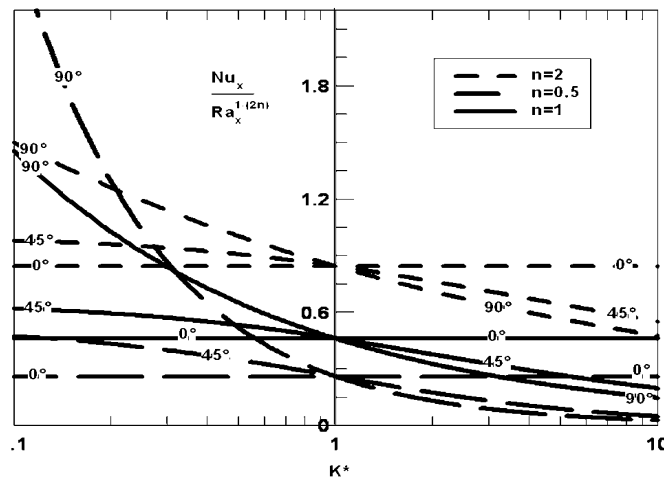


Figure 1. variation du nombre de Nusselt local en fonction de  $\theta$  pour différents valeurs de  $K^*$

Pour  $\theta = 90^\circ$  ( $a = K^*$ ), l'axe de perméabilité  $K_2$  est aligné sur la direction de la surface pendant que celui  $K_1$  lui est perpendiculaire. Sur la figure 1 on observe que le nombre de Nusselt dépend considérablement du rapport d'anisotropie  $K^*$ . Ce comportement découle du fait que le nombre de Rayleigh local  $Ra_x$  basé sur la perméabilité  $K_I$ , qui est maintenant perpendiculaire à la surface n'est pas le paramètre approprié pour décrire la situation. Ainsi selon l'équation (46) en utilisant un nombre de Rayleigh basé sur la perméabilité  $K_2$  (dont l'axe est parallèle

à la direction de la surface)  $Ra_x/a = K_2 \rho_\infty g \beta A x^{\lambda+n} / (\varepsilon \alpha^n)$  le nombre de Nusselt devient indépendant de  $K^*$ .

Pour  $\theta = 45^\circ$  il a été observé que lorsque le rapport d'anisotropie  $K^*$  croît le nombre de Nusselt local décroît. Cette situation, expliquée par Vasseur & Degan (1998) résulte du fait que pour un nombre de Rayleigh donné (c'est-à-dire pour une valeur de  $K_1$ ) une augmentation du rapport d'anisotropie  $K^*$  correspond à une diminution de la perméabilité  $K_2$  affaiblissant ainsi l'écoulement convectif et le taux de transfert de chaleur.

Les effets de l'orientation  $\theta$  des axes principaux de perméabilité du milieu poreux sur le nombre de Nusselt local  $Nu_x$  pour différentes valeurs du rapport d'anisotropie sont présentés à la figure 2. La surface verticale chauffée isothermiquement est adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide dilatant ( $n=2$ ). Dans le cas du milieu isotrope  $K^*=1$  et  $a=1$ , le paramètre  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  est indépendant de  $\theta$ . En général une symétrie des résultats par rapport à  $\theta=90^\circ$  est observée sur la figure 2. Il peut être montré à partir des équations gouvernantes (9) et (18) et des conditions aux limites (19) et (20) que si  $\psi(x, y)$  et  $T(x, y)$  sont solution pour  $Ra_H$ ,  $K^*$  et  $\theta$  alors  $\psi(x, 1-y)$  sont aussi solutions pour  $Ra_H$ ,  $K^*$  et  $(\pi-\theta)$ . Nous pouvons donc limiter la discussion à  $0 < \theta < 90^\circ$ . Ainsi la Figure 2 indique que pour  $K^* < 1$ ,  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  est minimal à  $\theta=0^\circ$ , pour une perméabilité minimale dans la direction verticale mais maximal à  $\theta=90^\circ$  pour une perméabilité maximale dans la direction verticale. La situation inverse est observée pour  $K^* > 1$ . Dans ce cas le transfert de chaleur par convection est maximale pour  $\theta=0^\circ$  et minimal pour  $\theta=90^\circ$ . Ce comportement peut être démontré par le fait que l'on obtient  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4} = 0.8436 / a^{1/4}$  pour le cas étudié ici.

En prenant la dérivée première de  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  par rapport à  $\theta$  et en la posant égale à zéro on obtient l'équation  $(K^*-1) \sin 2\theta = 0$  qui donnent  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  maximal et minimal respectivement pour  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=90^\circ$ . Ce comportement peut être démontré par le fait que l'on obtient  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4} = 0.8436 / a^{1/4}$  pour le cas étudié ici. En prenant la dérivée première de  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  par rapport à  $\theta$  et en la posant égale à zéro on obtient l'équation  $(K^*-1) \sin 2\theta = 0$  qui donnent  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  maximal et minimal respectivement pour  $\theta=0^\circ$  et  $\theta=90^\circ$ . De la dérivée seconde, on obtient respectivement lorsque  $\theta=0^\circ$   $d^2 [Nu_x / (Ra_x)^{1/4}] / d\theta^2 = 1.6872(1-K^*)$  et  $d^2 [Nu_x / (Ra_x)^{1/4}] / d\theta^2 = 1.6872(K^*-1)(K^*)^{-5/4}$  lorsque  $\theta=90^\circ$ .

Ainsi lorsque le rapport d'anisotropie est supérieure à l'unité ( $K^* > 1$ ) respectivement inférieure à l'unité ( $K^* < 1$ ),  $Nu_x / (Ra_x)^{1/4}$  est maximal (minimal) à  $\theta=0^\circ$  et minimal (maximal) à  $\theta=90^\circ$ . Il ressort de ces résultats qu'un transfert maximal de chaleur est atteint lorsque l'orientation de l'axe principal du milieu poreux anisotrope ayant la perméabilité la plus élevée est parallèle (perpendiculaire) au champ gravitationnel. Des résultats similaires ont été rapportés dans le passé par Zhang (1993), Degan *et coll.* (1995), lorsqu'ils ont étudié les effets de l'anisotropie en perméabilité sur le transfert de chaleur par convection dans une cavité verticale confinée par un milieu poreux dont les axes de perméabilité sont orientés arbitrairement. Le milieu poreux étant chauffé isothermiquement par le côté.

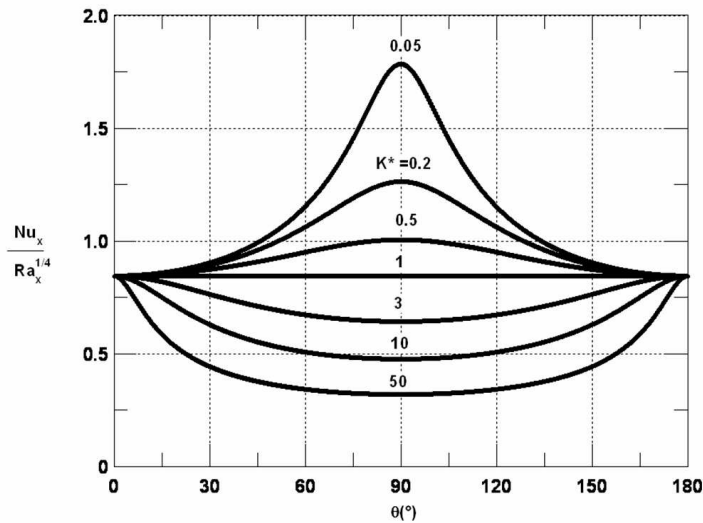


Figure 2. Effet de l'angle d'orientation des axes principaux sur le nombre de Nusselt local.

La Figure 3 montre les effets du nombre de Darcy-Rayleigh modifié  $R_H$ , sur le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_{0-H}$  pour  $K^* = 10$ ,  $\theta = 90^\circ$  et pour différents indices de viscosité  $n$ , lorsque la surface est chauffée par un flux constant de chaleur.

Comme il a été mentionné ci-dessus, l'exposant  $\lambda$  figurant dans la loi de puissance dépend de l'indice de viscosité par la relation  $\lambda = n / (2n + 1)$ . Sur la Figure 3 les courbes correspondantes à chaque valeur de  $n$  sont des droites. Les pentes de ces droites sont fonction de  $n$ . On peut observer que le transfert de chaleur n'est amorcé que pour des nombres de Darcy-Rayleigh de valeurs élevées. Ainsi pour un nombre de Darcy-Rayleigh fixé, le nombre de Nusselt moyen croît pour des indices de viscosité de plus en plus faibles. Ce résultat est conforme à celui obtenu par Bian *et coll.* (1994) lorsqu'ils ont étudié numériquement la couche limite en convection naturelle dans une cavité verticale confinant un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien.

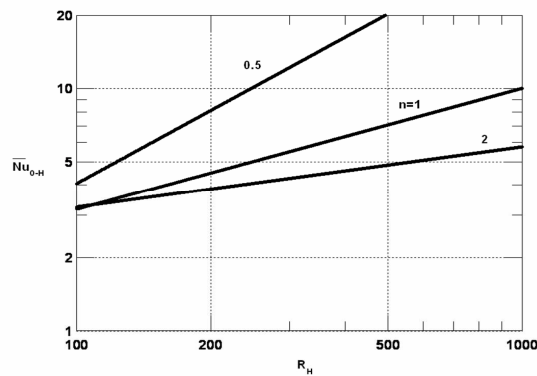


Figure 3 . variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Darcy-Rayleigh modifié pour différentes valeurs de  $n$

## CONCLUSION

Le problème discuté dans la présente étude est relatif au régime de couche limite en régime convectif permanent le long d'une surface verticale bordant un milieu poreux anisotrope saturé par un fluide non Newtonien. De l'analyse des résultats, il se dégage les conclusions suivantes :

- L'écoulement convectif le long de la surface bordant le milieu poreux est considérablement affecté par les paramètres d'anisotropie que sont le rapport d'anisotropie et l'angle d'inclinaison des axes principaux de perméabilité
- Le transfert de chaleur le long de la surface est maximal (minimal) lorsque l'axe principal ayant la perméabilité élevée est orienté parallèlement (perpendiculairement) au champ gravitationnel.
- Lorsqu'on augmente le nombre de Darcy-Rayleigh modifié ou lorsque l'indice de viscosité du fluide devient de plus en plus faible, l'écoulement convectif le long de la surface devient de plus en plus important.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CHENG P., 1978, Heat transfer in geothermal systems. *Adv. Heat Transfer*. 15, 1-105
- CHENG P. & MINKOWYCZ W. J., 1977, Free convection about a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium with application to heat transfer from a dyke. *J. Geophys. Res.* 82, 2040-2044
- JOHNSON C. & CHENG P., 1978, Possible similarity solutions for free convection boundary layers adjacent to flat plates in porous media. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 21: 709-718
- SEETHARAMU K. N. & DUTTA P., 1990, Free convection in a saturated porous medium adjacent to a non-isothermal vertical impermeable wall. Effects of anisotropy on the free convection from a concentrated source in a porous medium. *Wärme-und-Stoffübertragung* 25: 9-15
- NAKAYAMA A. & KOYAMA H., 1987, An integral method for free convection from a vertical heated surface in a thermally stratified porous medium. *Wärme-und-Stoffübertragung* 21: 297-300
- HONG J. T., TIEN C. L. & KAVIANY M., 1985, Non-Darcy effects on vertical-plate natural convection in a porous medium with high porosities. *Int. J. Heat Mass Transfer* 28: 2149-2157
- KAVIANY M. & MITTAL M., 1987, Natural convection heat transfer from a vertical plate to high permeability porous media: an experiment and an approximate solution. *Int. J. Heat Mass Transfer* 30: 967-977
- CHEN H. T. & CHEN C. K., 1988, Free convection flow of non-Newtonian fluids along a vertical plate embedded in a porous medium. *J. Heat Transfer* 110: 257-260
- RASTOGI S. K. & POULIKAKOS D., 1995, Double-diffusion from a vertical surface in a porous region saturated with a non-Newtonian fluid. *Int. J. Heat Mass Transfer* 38: 935-946
- CASTINEL G. & COMBARNOUS M., 1974, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris. B* 278 : 701-704
- EPHERRE J. F., 1975, Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. *Rev. Gen. Therm* 168: 949-950
- MCKIBBIN R., 1984, Thermal convection in a porous layer: effects of anisotropy and surface boundary conditions. *Trans. Porous Media* 1: 271-292
- KIMURA S., MASUDA Y. & KAZUO HAYASHI T., 1993, Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (effects of anisotropic properties of porous matrix). *Heat transfer Jpn. Res* 22: 139-153
- DEGAN G. & VASSEUR P., 1996, Natural convection in a vertical slot filled with an anisotropic porous medium with oblique principal axes. *Numerical Heat Transfer* A30: 397-412

- ENE H. I., 1991, Effects of anisotropy on the free convection from a vertical plate embedded in a porous medium. *Trans. Porous Media* 6: 183-194
- VASSEUR P. & DEGAN G., 1998, Free convection along a vertical heated plate in a porous medium with anisotropic permeability. *Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow* 8: 43-63
- Pascal H., 1983, Rheological behaviour effect of non-Newtonian fluids on steady and unsteady flow through porous media. *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 7:207-224
- Pascal H., 1986, Rheological effects of non-Newtonian behaviour of displacing fluids on stability of a moving interface in radial oil displacement mechanism in porous media. *Int. J. Engin. Science* 24: 1465-1476
- Bear J., 1972, *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, Elsevier, New York
- Bejan A., 1984, *Convection heat transfer*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons
- Bian W., Vasseur P., Bilgen E., 1994 Boundary-layer analysis for natural convection in a vertical porous layer filled a non-Newtonian fluid. *Int. J. Heat and Fluid Flow* 15: 384-391.

### NOMENCLATURE

$a, b, c$	constantes, équation (10)
$A$	constante positive équation (19)
$c_p$	chaleur spécifique à pression constante
$\bar{g}$	accélération gravitationnelle
$k$	conductivité thermique
$\bar{K}$	tenseur de la perméabilité, équation (8)
$\kappa_1, \kappa_2$	perméabilités suivant les axes principaux
$\kappa^*$	rapport d'anisotropie en perméabilité, $\kappa_1/\kappa_2$
$H$	hauteur de la surface
$I$	expression, équation (40)
$J$	expression, équation (41)
$p$	pression
$n$	indice de viscosité du fluide non-Newtonien
$Nu_x$	nombre de Nusselt local, équation (46)
$Nu_H$	nombre de Nusselt local, équation (30)
$\bar{Nu}_{0-H}$	nombre de Nusselt moyen, équation(49)
$Ra_x$	nombre de Darcy-Rayleigh, équation(42)
$Ra_H$	nombre de Darcy-Raleigh modifié, équation (27)
$R_H$	nombre de Darcy-Rayleigh modifié, équation(50)
$T$	température
$\bar{V}$	vitesse de filtration du fluide
$u, v$	composantes de la vitesse dans les directions x et y
$x, y$	coordonnées cartésiennes
<b>Lettres grecques</b>	
$\alpha$	diffusivité thermique
$\beta$	coefficient d'expansion thermique du fluide
$\delta$	épaisseur de la couche limite
$\Delta T$	échelle caractéristique de la température
$\varepsilon$	constante, équation (3)
$\eta$	variable, équation (38)
$\gamma$	porosité du milieu poreux
$\lambda$	exposant dans la loi de variation de la température de la surface
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\mu_a$	viscosité apparente du fluide

$\psi$	fonction de courant
$\theta$	angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
$\Theta$	profil de température
$\rho$	densité du fluide
$(\rho c_p)$	capacité calorifique du fluide

**Exposants**

' dérivée partielle par rapport à  $\eta$

**Indices**

$\infty$  relatif au courant libre, loin de la surface verticale