

## ANALYSE DE LA COUCHE LIMITE DYNAMIQUE SUR UNE PLAQUE HORIZONTALE BORDANT UN MILIEU POREUX ANISOTROPE SATURE

DEGAN Gérard\* et BACHAROU Taofic

Laboratoire d’Énergétique et de Mécanique Appliquées (LEMA)  
Ecole Polytechnique d’Abomey Calavi/ Université d’Abomey Calavi,  
01 BP 2009 Cotonou (Bénin), \*ger\_degan@yahoo.fr

(Reçu le 12 mai 2008 ; Accepté le 27 juin 2008)

### RESUME

Dans cette étude, le problème de la couche limite dynamique au voisinage d’une surface horizontale imbibée dans un milieu poreux est résolu analytiquement. Le milieu poreux saturé par un fluide incompressible est anisotrope en perméabilité dont les directions principales sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel terrestre. L’épaisseur de la couche limite dynamique et les profils des vitesses axiale et transversale sont obtenus en fonction des paramètres de contrôle de l’écoulement. Il est démontré que la condition d’existence de la couche limite est aussi fonction des paramètres d’anisotropie du milieu poreux qui influencent fortement le modèle hydrodynamique.

Mots clés : Couche limite dynamique, milieu poreux anisotrope, écoulement externe, plaque horizontale.

### ABSTRACT

In this study the problem of boundary layer of the velocity about a horizontal surface embedded in a porous medium is analytically solved. The porous saturated by an incompressible fluid is anisotropic in permeability whose principal axes are oriented with respect to terrestrial gravity field. The thickness of the dynamic boundary layer and the axial and transversal velocity profiles are obtained in terms of the flow parameters. It has demonstrated that the existence condition of the boundary layer is also a function of the anisotropic parameters of the porous medium which strongly influence the hydrodynamic model.

Key words: Dynamic boundary-layer, anisotropic porous medium- external flow,-horizontal surface.

### INTRODUCTION

Le problème de l’écoulement d’un fluide incompressible sur une plaque plane est fondamental en mécanique des fluides et en hydraulique. A l’extérieur du voisinage immédiat de la plaque, se développent des vitesses d’écoulement qui sont de l’ordre de la vitesse de courant libre loin de la plaque et des déviations des lignes de courant et de la distribution de la vitesse sont visibles et se distinguent de la couche de fluide qui adhère à la paroi de cette plaque. La transition entre la vitesse de l’écoulement nulle à la paroi et celle prédominant dans le courant libre à une certaine distance de l’obstacle, engendre une couche de fluide appelée couche limite qui se développe le long de cette plaque. Cette couche limite se divise en deux régions ; la première observable au voisinage immédiat de la plaque en couche très fine où la très faible viscosité du fluide exerce une influence

importante sur la contrainte de cisaillement et où le gradient de la vitesse normal à la plaque est très élevé est la région de couche limite ; la seconde région extérieure à la première est celle où les gradients de vitesse sont faibles et où la viscosité du fluide n’a aucune importance sur l’écoulement qui y est considéré sans frottement et potentiel (c’est la région du courant libre). Ce problème de couche limite dynamique a été résolu pour la première fois par Blasius [1] en proposant une solution en séries de puissances. Plus tard, des méthodes numériques ont été utilisées [2, 3] pour obtenir la solution de l’équation de la couche limite dynamique. Dans ces études, il est supposé qu’une couche limite d’épaisseur variable s’est formée au voisinage de la plaque et pour laquelle seule la composante  $u$  dans la direction de l’écoulement est considérée. Cependant, aucune mention n’est faite sur la couche limite dynamique associée à la composante transversale  $v$  qui a une

influence considérable sur le mouvement du fluide visqueux sur la plaque plane. En effet, Kanakov [4] a identifié la formation de deux couches limites associées aux deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse dans la situation où le milieu est fluide. De même, Chandrasekhara [8] a présenté dans une analyse les solutions au problème de couches limites dynamiques axiale et transversale dans le cas d'un écoulement laminaire permanent sur une plaque horizontale imbibée dans un milieu poreux saturé. Cet auteur a démontré que la couche limite transversale est plus épaisse que la couche limite axiale et que l'augmentation du nombre de Darcy réduit considérablement l'épaisseur de la couche limite axiale.

Dans cette investigation, il s'agit d'étudier le phénomène de la formation des couches limites précédemment identifiées au voisinage de la plaque horizontale dans le cas où un tel écoulement a lieu en milieu poreux anisotrope en perméabilité. Une analyse d'échelle des équations gouvernantes sera d'abord faite pour élaborer la condition d'existence de ces couches limites dynamiques. Ensuite les expressions respectives des distributions de vitesse et des épaisseurs des couches limites sont trouvées en fonction des paramètres physiques de contrôle de l'écoulement. Une analyse de l'influence des paramètres d'anisotropie du milieu poreux sur le phénomène hydrodynamique sera investiguée.

**NOMENCLATURE**

- $a, b, c$  constantes, équation (8)
- $F$  fonction de la variable  $\eta$ , équation (31)
- $A, E$  constantes, équation (30)
- $B$  paramètre physique, équation (30)
- $c_p$  chaleur spécifique à pression constante
- $\bar{g}$  accélération gravitationnelle
- $\bar{k}$  conductivité thermique
- $\bar{K}$  tenseur de la perméabilité, équation (8)
- $K_1, K_2$  perméabilités suivant les axes principaux
- $K^*$  rapport d'anisotropie en perméabilité,  $K_1/K_2$
- $L$  longueur de la plaque
- $p$  pression du fluide
- $p, q$  constantes, équations (35)
- $Re_x$  nombre de Reynolds local
- $\bar{v}$  vitesse de filtration du fluide

- $u, v$  composantes de la vitesse dans les directions  $x$  et  $y$
- $x, y$  coordonnées cartésiennes

**Lettres grecques**

- $\delta$  épaisseur de la couche limite primaire
- $\Delta$  épaisseur de la couche limite secondaire
- $\zeta$  rapport des épaisseurs des couches limites,  $\zeta = \Delta/\delta$
- $\eta$  variable, équation (25)
- $\mu$  viscosité dynamique du fluide
- $\nu$  viscosité cinématique du fluide
- $\varphi$  angle d'orientation des directions principales du tenseur de perméabilité
- $\tau_w$  contrainte de cisaillement à la paroi
- $\Gamma$  contrainte pariétale, équation (52)
- $\rho$  densité du fluide
- $(\rho c_p)$  capacité calorifique du fluide

**Exposants**

- ' dérivée partielle par rapport à  $x$

**Indices**

- $\infty$  relatif à la zone de courant libre
- $w$  relatif à la paroi

**FORMULATION MATHÉMATIQUE**

Le modèle physique tel qu'indiqué à la Figure 1 consiste en une plaque plane horizontale infiniment longue, imbibée dans un milieu poreux saturé par un fluide newtonien incompressible, en équilibre local avec la matrice solide.

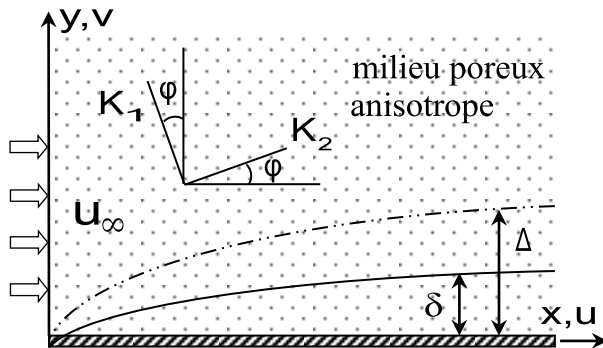


Figure 1 : Modèle physique et système de coordonnées

Le milieu poreux est anisotrope en perméabilité et les directions principales du tenseur de perméabilité sont orientées arbitrairement par rapport au champ gravitationnel. Ainsi, l'anisotropie du milieu poreux est caractérisée par le rapport des perméabilités  $K_1/K_2$  et l'angle d'orientation  $\varphi$  défini comme étant l'angle formé par la direction horizontale et l'axe principal portant la perméabilité  $K_2$ . Les axes de coordonnées axiales et transversales sont respectivement  $x$  et  $y$ . Pour la première couche limite d'épaisseur  $\delta$  considérée au voisinage de la plaque, la composante  $u$  de la vitesse varie de 0 (à la lisière) à  $u_\infty$  dans la région de courant libre. Pour la seconde couche limite d'épaisseur  $\Delta$ , la composante  $v$  de la vitesse varie de 0 sur la plaque à 0 dans la zone de courant libre.

Au regard des considérations précitées, l'équation régissant la conservation du mouvement en milieu poreux anisotrope, eu égard à la loi de Darcy généralisée (voir Bear [5]), s'écrit comme suit :

$$\vec{V} = \frac{\overline{\overline{K}}}{\mu} (-\nabla \vec{p}) \quad (1)$$

où

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} K_1 \sin^2 \varphi + K_2 \cos^2 \varphi & (K_2 - K_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ (K_2 - K_1) \sin \varphi \cos \varphi & K_2 \sin^2 \varphi + K_1 \cos^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dans ces équations,  $\vec{V}$  est la vitesse de filtration,  $\mu$  la viscosité dynamique,  $\overline{\overline{K}}$  le tenseur de perméabilité et  $p$  la pression du fluide. En considérant que la viscosité du fluide saturant est importante et que le milieu est à grandes porosités, suivant les définitions de Chandrasekhara et Hanumanthappa [6], de Manoj Chodhary [7], les équations des couches limites peuvent être formulées en régime permanent comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -v \left( \overline{\overline{K}} \right)^{-1} \vec{V} + v \nabla^2 \vec{V} \quad (4)$$

Formulées en variables primitives, les équations (3) et (4) deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{K_1} (-au + cv) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{K_1} (cu - bv) + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos^2 \varphi + K^* \sin^2 \varphi; & b &= \sin^2 \varphi + K^* \cos^2 \varphi \\ c &= (1 - K^*) \cos \varphi \sin \varphi; & K^* &= K_1 / K_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

L'analyse étant basée sur la notion d'une *couche limite laminaire secondaire* d'épaisseur  $\Delta$  plus large que la *couche limite primaire* d'épaisseur  $\delta$  qui se développent au-dessus de la plaque, les conditions aux limites telles que formulées par Chandrasekhara [8] s'écrivent comme suit :

$$y = 0: \quad u = v = 0 \quad (9)$$

$$y = \Delta: \quad u = u_\infty, \quad v = 0 \quad (10)$$

Il découle des conditions aux limites précédentes, ce qui suit :

$$y = \Delta: \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad (11)$$

## ANALYSE D'ECHELLE ET CONDITIONS D'EXISTENCE

Considérons la région ( $\delta \times L$ ) de la couche limite laminaire primaire d'épaisseur  $\delta$  au-dessus de la plaque plane horizontale de longueur caractéristique  $L$ . Dans cette région d'intérêt hydrodynamique, on a :

$$\delta \ll L \quad (12)$$

de sorte que les grandeurs physiques peuvent être approximées comme il suit :

$$u \sim u_\infty, \quad x \sim L, \quad y \sim \delta \quad (13)$$

Il résulte de ce qui précède les équivalences suivantes des équations gouvernantes (5)-(7).

$$\frac{u_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta} \quad (14)$$

$$\underbrace{\left( u_\infty \frac{u_\infty}{L}, \frac{\delta u_\infty}{L} \frac{u_\infty}{\delta} \right)}_{\text{inertie}} \sim \frac{v}{K_2} \underbrace{\left( au_\infty, \frac{c\delta u_\infty}{L} \right)}_{\text{pression}} \quad \text{ou} \quad \frac{L}{\delta} \gg 1 \quad (22)$$

$$\sim v \underbrace{\left( \frac{u_\infty}{L^2}, \frac{u_\infty}{\delta^2} \right)}_{\text{viscosité}} \quad (15)$$

$$\underbrace{\left( u_\infty \frac{u_\infty \delta}{L^2}, \frac{u_\infty \delta}{L} \left( \frac{u_\infty \delta}{L} \frac{1}{\delta} \right) \right)}_{\text{inertie}} \sim \frac{v}{K_1} \underbrace{\left( cu_\infty, b \frac{\delta u_\infty}{L} \right)}_{\text{pression}}$$

ou

$$\sim v \underbrace{\left( \frac{u_\infty \delta}{L} \frac{1}{L^2}, \frac{u_\infty \delta}{L} \frac{1}{\delta^2} \right)}_{\text{viscosité}} \quad (16)$$

Tenant compte des équivalences (13) – (16) et de la condition (12), les équations de mouvement se ramènent aux équilibres suivants :

$$\frac{v}{K_1} \left( au_\infty, c \frac{\delta u_\infty}{L} \right) \sim \frac{u_\infty^2}{L} \quad (17)$$

$$\frac{v}{K_1} \left( cu_\infty, b \frac{\delta u_\infty}{L} \right) \sim \frac{u_\infty^2 \delta}{L^2} \quad (18)$$

Or, de la condition (12) on peut déduire que

$$\left( u_\infty^2 \delta / L^2 \right) \ll \left( u_\infty^2 / L^2 \right), \text{ ce qui amène à négliger la}$$

contribution de l'équation du mouvement (7) dans la direction de (Oy) normale à l'écoulement. Par conséquent, le problème à résoudre se ramène à la résolution du système constitué par l'équation (5) et l'équation simplifiée de mouvement suivante :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{K_1} (-au + cv) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (19)$$

La division membre à membre des termes correspondants des équations d'équilibre (17) et (18) donne :

$$\left( \frac{a}{c}, \frac{c}{b} \right) \sim \frac{L}{\delta} \quad (20)$$

En d'autres termes, on retient que :

$$\frac{a}{c} \sim \frac{L}{\delta} \quad (21)$$

Or, la condition (12) impose que

Il résulte des équations (21) et (22) que les équations de la couche limite dynamique ne sont valides que lorsque la condition suivante :

$$\frac{a}{c} \gg 1 \quad (23)$$

est valide.

## RESOLUTION

Dans la direction de l'écoulement on pose que la distribution de la vitesse est de la forme :

$$u = u_\infty f(\eta) \quad (24)$$

avec

$$\eta = \frac{y}{\delta} \quad (25)$$

$\delta$  étant l'épaisseur de la couche limite dynamique primaire dans la direction du courant libre de l'écoulement.

En prenant la dérivée des deux membres de l'équation (24) par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u_\infty f' \eta \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \quad (26)$$

Donc l'équation de continuité (5) entraîne :

$$v = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = u_\infty \frac{d\delta}{dx} \int_0^\eta f' d\eta \quad (27)$$

$$\text{Puisque } \int_0^\eta f' \eta d\eta = f \eta - \int_0^\eta f d\eta, \text{ l'équation}$$

(27) se réduit à :

$$v = u_\infty \frac{d\delta}{dx} \left[ f\eta - \int_0^\eta f d\eta \right] \quad (28)$$

Donc en utilisant les équations (24), (26) et (28) l'équation (19) devient :

$$-u_\infty f f' \eta \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} + u_\infty \frac{d\delta}{dx} \left[ f\eta - \int_0^\eta f d\eta \right] f' \frac{1}{\delta} = -\frac{v}{K_1} \left\{ af + c \frac{d\delta}{dx} \left[ f\eta - \int_0^\eta f d\eta \right] \right\} + v f'' \frac{1}{\delta^2} \quad (29)$$

Après simplification, l'équation (29) se met sous la forme :

$$-f' \int_0^\eta f d\eta = Af'' - BAaf + BEc \left( \eta f - \int_0^\eta f d\eta \right) \quad (30)$$

où :

$$A = \frac{v}{u_\infty \delta} \frac{1}{d\delta} \quad E = \frac{v}{u_\infty \delta} \quad B = \frac{\delta^2}{K_1}$$

B est un paramètre physique du milieu poreux basé sur l'épaisseur de la couche limite primaire  $\delta$ .

Pour résoudre l'équation intégral-différentielle (30), on suppose une solution  $f$  en série de puissances de  $\eta$  de la forme :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta^i \quad (31)$$

où les  $a_i$  sont des coefficients à déterminer.

La substitution de la fonction  $f$ , de ses dérivées et de son intégrale dans l'équation (30) donne après identification des termes de mêmes puissances dans les deux membres et utilisation de la condition aux limites (9) ce qui suit :

$$a_0 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{Ba}{6} a_1;$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{24A} (a_1 + BE c); \quad a_5 = \frac{B^2 a^2}{120} a_1$$

Par conséquent, la solution  $f$  se présente comme suit :

$$\frac{u}{u_\infty} = f(\eta) = a_1 \eta + \frac{Baa_1}{6} \eta^3 - \frac{a_1}{24A} (a_1 + BE c) \eta^4$$

$$- \frac{B^2 a^2}{120} a_1 \eta^5 + \dots \quad (32)$$

En limitant la série de puissance aux trois premiers termes, la solution approchée de la distribution de la vitesse dans la direction horizontale est :

$$\frac{u}{u_\infty} = a_1 \eta + \frac{Baa_1}{6} \eta^3 - \frac{a_1}{24A} (a_1 + BE c) \eta^4 \quad (33)$$

Par ailleurs, similairement au calcul précédent, l'utilisation des équations (28) et (33) donne la distribution de la vitesse dans la direction verticale :

$$\frac{v}{u_\infty} = \frac{d\delta}{dx} \left[ \frac{a_1}{2} \eta^2 + \frac{Baa_1}{8} \eta^4 + \right.$$

$$\left. - \frac{a_1}{30A} (a_1 + BE c) \eta^5 \right] \quad (34)$$

Il est à remarquer que, en dehors des paramètres d'anisotropie  $a$  et  $c$  du milieu poreux et du paramètre caractéristique  $B$ , les constantes  $A$ ,  $E$  et  $a_1$  dont dépendent les expressions de  $u$  et de  $v$  restent à être déterminées.

Désignons par  $\zeta$  le rapport des épaisseurs des couches limites, défini par  $\zeta = \Delta/\delta$ . La combinaison de l'équation (34) et de la condition aux limites (10) donne la relation :

$$\zeta^3 + p\zeta^2 + q = 0 \quad (35)$$

où :

$$p = -\frac{15}{4} \frac{BAa}{a_1 + BE c}; \quad q = -\frac{15A}{a_1 + BE c}$$

Pour résoudre l'équation cubique (35), nous devons connaître les valeurs  $A$ ,  $a_1$ ,  $B$  et  $E$ . Pour ce faire, nous supposons que les profils de vitesse  $u$  en fonction de la coordonnée  $y_\Delta$  dans la couche limite secondaire sont similaires aux profils analogues dans la couche limite primaire, c'est-à-dire que l'équation (33) est aussi valide pour la couche limite secondaire. Dans ce cas, la variable  $\eta$  dans l'équation (34) est définie comme suit :

$$\eta = \frac{y_\Delta}{\Delta} = \frac{y_\Delta}{\zeta \delta} \quad (36)$$

En substituant l'équation (36) dans l'équation (33), on obtient l'expression de  $u$  en fonction de la variable originale  $\eta = y/\delta$  et de  $\zeta$ , soit :

$$\frac{u}{u_\infty} = a_1 \frac{\eta}{\zeta} + \frac{Baa_1}{6} \frac{\eta^3}{\zeta^3} +$$

$$- \frac{a_1}{24A} (a_1 + BE c) \frac{\eta^4}{\zeta^4} \quad (37)$$

Dans l'équation ci-dessus (équation 37),  $\eta$  varie de 0 à  $\zeta$  comme dans l'équation (34). En utilisant les conditions aux limites (10) et (11), on obtient un système de deux équations à deux inconnues ( $a_1$ ,  $A$ ) qui, après réarrangement des termes devient :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( 1 + \frac{Ba}{6} - \frac{Bc}{24} \frac{d\delta}{dx} \right) a_1 - \frac{a_1^2}{24A} &= 1 \\ \left( 1 + \frac{Ba}{2} - \frac{Bc}{6} \frac{d\delta}{dx} \right) a_1 - \frac{a_1^2}{6A} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (38)$$

On trouve :

$$a_1 = \frac{24}{(18 + Ba)} \quad (39)$$

$$A = \frac{8}{(18 + Ba) \left( 2 + Ba - \frac{Bc}{3} \frac{d\delta}{dx} \right)} \quad (40)$$

Donc :

$$E = A \frac{d\delta}{dx} = \frac{8 \frac{d\delta}{dx}}{(18 + Ba) \left( 2 + Ba - \frac{Bc}{3} \frac{d\delta}{dx} \right)} \quad (41)$$

Avec ces valeurs de  $a_1$ ,  $A$  et  $E$ , l'équation (37) satisfait les conditions aux frontières (9) et (11) pour  $\eta = 0$  et  $\eta = \zeta$ .

A partir des égalités de  $A$  suivantes :

$$A = \frac{v}{u_\infty} \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} = \frac{8}{(18 + Ba) \left( 2 + Ba - \frac{Bc}{3} \frac{d\delta}{dx} \right)} \quad (42)$$

on déduit ce qui suit :

$$\delta^2 + \frac{v(18 + Ba)Bc}{12u_\infty} \delta - \frac{v(18 + Ba)(2 + Ba)x}{4u_\infty} = 0 \quad (43)$$

une équation du second degré en  $\delta$  dont la seule racine convenable est donnée par l'expression :

$$\delta = -\frac{v(18 + Ba)Bc}{24u_\infty} + \sqrt{\left( \frac{v(18 + Ba)Bc}{24u_\infty} \right)^2 + \frac{vx}{u_\infty} \frac{[(18 + Ba)(2 + Ba)]}{4}} \quad (44)$$

Dans le cas où le milieu poreux est isotrope en perméabilité,  $K_1 = K_2 = cte$  (donc  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ) et l'expression (44) devient :

$$\delta = \sqrt{\frac{vx}{u_\infty} \frac{(18 + B)(2 + B)}{4}} \quad (45)$$

Le résultat donné par l'expression (45) coïncide avec celui obtenu par Chandrasekhara [8].

Par ailleurs, de l'expression (44) on déduit :

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{D}{8} \sqrt{\frac{v}{u_\infty}} \sqrt{\left[ \frac{v}{u_\infty} \left( \frac{Bc}{a_1} \right)^2 + \frac{x D}{4} \right]^{-1}} \quad (46)$$

où  $D = (18 + Ba)(2 + Ba)$ .

En remarquant  $u_\infty x / v = Re_x$  est le nombre de Reynolds local,

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{D}{8 \left[ \left( \frac{Bc}{a_1} \right)^2 + \frac{D}{4} Re_x \right]^{1/2}} \quad (47)$$

et les expressions (40) et (41) deviennent :

$$A = \frac{8 \left[ \left( \frac{Bc}{a_1} \right)^2 + \frac{D}{4} Re_x \right]^{1/2}}{D \left\{ \left[ \left( \frac{Bc}{a_1} \right)^2 + \frac{D}{4} Re_x \right]^{1/2} - \frac{Bc}{a_1} \right\}} \quad (48)$$

$$E = \left\{ \left[ \left( \frac{Bc}{a_1} \right)^2 + \frac{D}{4} Re_x \right]^{1/2} - \frac{Bc}{a_1} \right\}^{-1} \quad (49)$$

Puisque, en dehors des paramètres d'anisotropie, les coefficients  $A$ ,  $E$  et  $a_1$  sont fonctions du paramètre caractéristique du milieu poreux  $B$ , l'équation cubique (35) est résolue pour différentes valeurs de  $B$ .

Tenant compte de l'équation (47), l'expression du profil de vitesses transversale  $v$  qui satisfait les conditions aux limites à  $\eta = 0$  et  $\eta = \zeta$  est obtenue en utilisant l'expression (34) sous la forme :

$$\frac{v}{u_\infty} = \frac{[(18 + Ba)(2 + Ba)]^{1/2}}{4 Re_x^{1/2}} \left[ \frac{a_1}{2} \eta^2 + \frac{Baa_1}{8} \eta^4 - \frac{a_1}{30A} (a_1 + BEc) \eta^5 \right] \quad (50)$$

La contrainte de cisaillement à la paroi  $\tau_w$  de la plaque plane horizontale est connue, en variables primitives, par la relation suivante :

$$\tau_w = \mu \left( \frac{du}{dy} \right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{u_\infty}{\zeta} \frac{a_1}{\delta} \quad (51)$$

La contrainte pariétale adimensionnelle est donc exprimée par :

$$\Gamma = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\nu}{u_\infty} \frac{1}{\zeta} \frac{a_1}{\delta}$$

qui devient, après utilisation de l'équation (44) :

$$\Gamma = \frac{a_1}{\zeta Re_x} \left\{ -\frac{Bc}{a_1 Re_x} + \left[ \left( \frac{Bc}{a_1 Re_x} \right)^2 + \frac{D}{4 Re_x} \right]^{1/2} \right\}^{-1} \quad (52)$$

## RESULTATS ET DISCUSSION

La figure 2 illustre l'effet du rapport d'anisotropie en perméabilité sur la distribution de la vitesse de l'écoulement sur la plaque horizontale pour les valeurs des paramètres de contrôle  $Re_x=0.7$ ,  $B=2$  et  $\varphi=45^\circ$ . Il est à noter que, pour chaque valeur donnée de  $K^*$ , le profil de vitesse croît à partir du bord d'attaque jusqu'à sa valeur maximale obtenue pour  $u/u_\infty=1$  en  $\eta=1$  et décroît progressivement pour atteindre sa valeur limite sur la plaque, loin de la lisière.

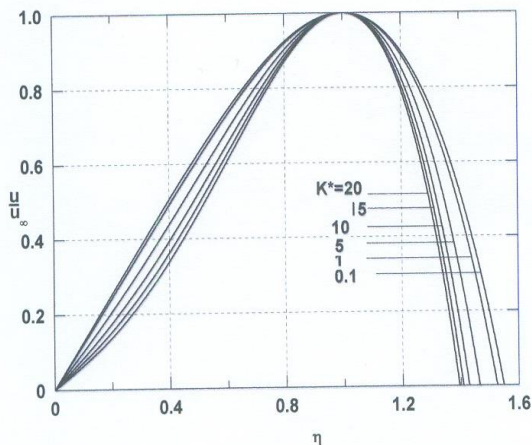


Figure 2 : Effet du rapport d'anisotropie  $K^*$  sur la distribution de la vitesse axiale pour  $Re_x=0.7$ ,  $B=2$  et  $\varphi=45^\circ$ .

Cette valeur limite  $\eta$  dépendante de  $K^*$  est d'autant plus élevée que le rapport d'anisotropie est plus faible. Par exemple pour  $K^*=20$ ,  $\eta=1.4$  et pour  $K=0.1$ ,  $\eta \approx 1.57$ .

De même, pour une valeur donnée de  $\eta$  comprise entre 0 et 1, la vitesse axiale de distribution est d'autant plus faible que le rapport d'anisotropie en perméabilité est plus élevé. Il en résulte que, pour une orientation donnée des directions principales de la matrice poreuse, un rapport d'anisotropie en perméabilité élevé ( $K^*>1$ ) augmente la résistance à l'écoulement et par conséquent une distribution de vitesse relativement moins accentuée.

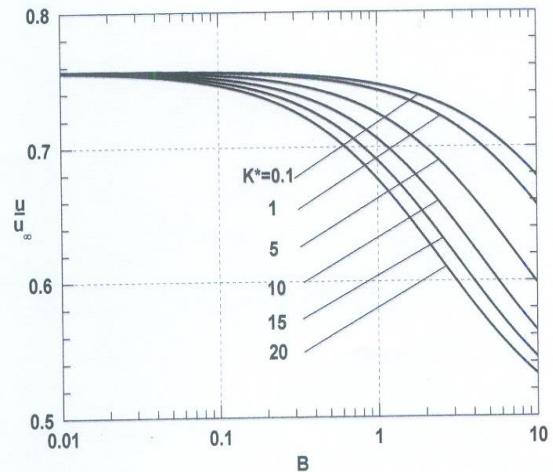


Figure 3 : Evolution de la distribution de la vitesse axiale en fonction de  $B$  pour  $Re_x=0.5$ ,  $\eta=0.6$  et  $\varphi=35^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ .

La distribution de la vitesse axiale  $u/u_\infty$  en fonction du paramètre du milieu poreux  $B$  est représentée sur la figure 3 pour  $Re_x=0.5$ ,  $\eta=0.6$  et  $\varphi=35^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ . L'examen des courbes confirme que le milieu poreux est absent dans la limite où  $B$  tend vers 0, ce qui entraîne que l'anisotropie du milieu poreux est hors-propos. Et comme on peut s'y attendre, lorsque  $B$  tend vers l'infini, le milieu poreux est manifestement présent et son anisotropie en perméabilité est mesurable. Il est à remarquer que, pour une valeur donnée de  $B$  comptée à partir de 0.1, la vitesse de l'écoulement est accentuée lorsque  $K^*<1$  et diminue progressivement au fur et à mesure que  $K^*$  augmente de plus en plus à partir de l'unité.

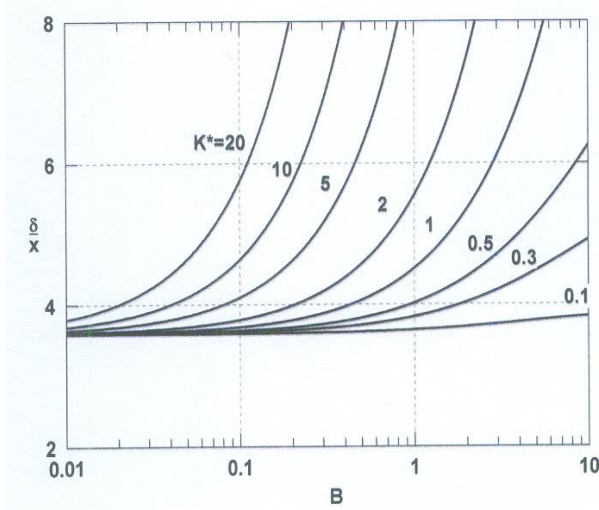


Figure 4 : Evolution du rapport  $\delta/x$  en fonction de  $B$  pour  $Re_x=0.7$ ,  $\varphi=45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ .

Un autre aspect du comportement de l'écoulement en régime de couche limite sur la plaque est visualisé sur la figure 4 qui illustre le rapport de la couche limite primaire  $\delta/x$  en fonction de  $B$  pour  $Re_x=0.7$ ,  $\varphi=45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ . Il résulte de l'examen de ces courbes que, dans la limite de  $B \rightarrow \infty$  où le milieu poreux est présent, pour une valeur donnée de  $B$ , le rapport de couche limite augmente lorsque  $K^* > 1$  et diminue quand  $K^* < 1$ . Cela est dû au fait que, pour une valeur fixe de  $B$  (c'est-à-dire de  $K_1$ ), une augmentation de  $K^*$  par rapport à l'unité se traduit par une augmentation de la perméabilité dans la direction verticale  $K_1$  par rapport à celle prévalant dans la direction horizontale  $K_2$ , ce qui occasionne une augmentation de l'épaisseur de la couche limite. Dans le cas contraire, quand  $K^* < 1$ , en considérant que  $K_1$  est fixe du fait de  $B$ , on conclut que naturellement la perméabilité verticale  $K_1$  est inférieure à la perméabilité horizontale  $K_2$ , diminuant par conséquent l'épaisseur de la couche limite.

L'effet de l'angle d'anisotropie en perméabilité  $\varphi$  sur le rapport de couche limite  $\delta/x$  est montré la figure 5 pour  $K^*=5$ ,  $B=1$  et pour différentes valeurs de  $Re_x$ . L'examen des courbes révèle que l'épaisseur de la couche limite pour un nombre de Reynolds donné est

maximale pour  $\varphi \approx 50^\circ$  et minimale pour  $\varphi \approx 150^\circ$ . En effet, l'annulation de la dérivée première par rapport à  $\varphi$  de l'expression de  $\delta/x$  obtenue de l'expression (44) confirme les résultats obtenus.

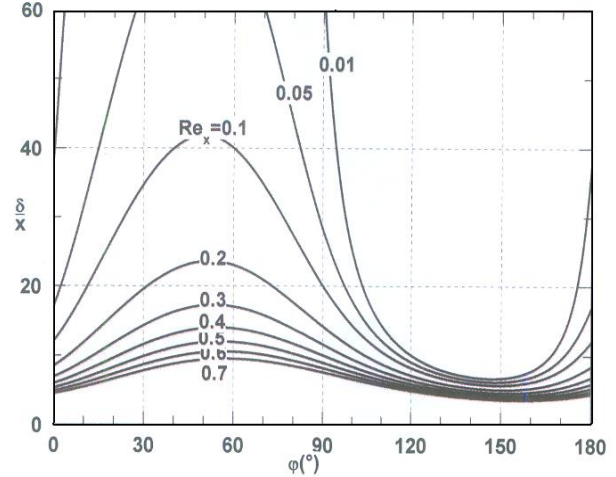


Figure 5 : Evolution du rapport  $\delta/x$  en fonction de  $\varphi$  pour  $K^*=5$ ,  $B=1$  et pour différentes valeurs de  $Re_x$ .

La figure 6 illustre la contrainte pariétale  $\zeta \Gamma$  en fonction de la position  $x/L$  pour  $Re_L=0.6$ ,  $\varphi=50^\circ$ ,  $B=1.5$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ . Comme on peut s'y attendre, au voisinage du bord d'attaque de la plaque, la contrainte est assez élevée et chute de façon drastique au fur et à mesure qu'on s'éloigne de ce bord d'attaque. Ce comportement peut être expliqué par le fait que la découverte de l'obstacle que constitue la lisière de la plaque engendre plus de résistance à l'écoulement, ce qui fait augmenter la friction pariétale. On note aussi que pour une valeur fixe de la position sur la plaque, la contrainte pariétale diminue avec l'augmentation de  $K^*$ .

En raison du fait que l'écoulement très accentué à partir de la lisière de la plaque se fait essentiellement dans la direction axiale horizontale, la perméabilité  $K_2$  est supérieure à celle  $K_1$  régnant dans la direction verticale et dans toutes les autres directions ; par conséquent le rapport d'anisotropie  $K^*(=K_1/K_2) < 1$  tandis que la contrainte pariétale se fait grande. Autrement dit, la contrainte pariétale augmente lorsque  $K^* < 1$  et diminue lorsque  $K^* > 1$  lorsque la position sur la plaque est maintenue constante.

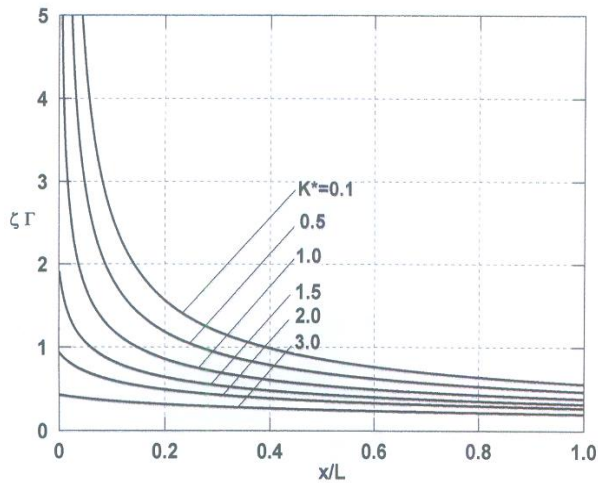


Figure 6. Evolution de la contrainte pariétale  $\zeta \Gamma$  en fonction de la position  $x/L$  pour  $Re_L=0.6$ ,  $\phi=50^\circ$ ,  $B=1.5$  et pour différentes valeurs de  $K^*$ .

## CONCLUSION

Le problème de la couche limite de la vitesse est étudié analytiquement au voisinage d'une plaque plane horizontale imbibée dans un milieu poreux anisotrope en perméabilité et ayant ses axes principaux orientés obliquement par rapport à la gravité. Il se dégage de cette étude les conclusions suivantes :

- 1) L'épaisseur de la couche limite dynamique et les distributions de vitesses axiale et transversale sont grandement influencées par les paramètres anisotropes du milieu poreux ;
- 2) Dans la limite où  $B$  tend vers l'infini, cas pour lequel le milieu poreux est omniprésent, une augmentation de  $K^*$  par rapport à l'unité se traduit par une augmentation de l'épaisseur de la couche limite ;
- 3) La contrainte pariétale augmente lorsque  $K^* < 1$  et diminue lorsque  $K^* > 1$  au fur et à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque de la plaque.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. BLASIUS H., 1908.- "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.", *Z. Math. Phys.* Vol. 56, pp.1
2. TOFFER C, 1912.- "Bermerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius, Grenzschichten mit kleiner Reibung." *Z. Math. Phys.* Vol 60, pp. 397.
3. HOWARTH L., 1938.- "On the solution of the laminar boundary layer equations". *Proc. Roy. Soc. London.* Vol. A 164, pp. 547.
4. KANAKOV P. K., 1960.- "Progress in heat transfer. Translated from Russian consultant Bureau." *New York*
5. BEAR J., 1972.- "Dynamics of fluids in porous media." *Dover Publications New York* .
6. CHANDRASEKHARA, C. B., HANUMANTHAPPA B., 1974.- "Structure of jets rotating porous systems". Accepted for publication in *Vignana Bharathi, Bangalore University journal*.
7. CHOUDHARY M., PROPSTER, SZEKELY J. M., 1976.- "On the importance of the inertial terms in the modelling of flow maldistribution in packed beds." *AIChE* Vol. 22, pp. 6.
8. CHANDRASEKHARA C. B., NAMBOODIRI S. M. P, HANUMANTHAPPA R. A., 1984.- "Similarity solutions for buoyancy induced flow in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surfaces". *Warme-Stofubertrag.* Vol. 18. pp.17.