

Solveur de Riemann HLLC pour les équations 2D de Saint Venant et application à l'écoulement dans la lagune de Cotonou

Abdou Wahidi BELLO*, Tahirou DJARA et M. Kokou ASSOGBA

*Laboratoire d'Electrotechnique de Télécommunication et d'Informatique Appliquée (LETIA),
Ecole Polytechnique d'Abomey Calavi (EPAC), University d'Abomey-Calavi, 01 BP 2009 Cotonou, Bénin*

* Correspondance, courriel : solfath@yahoo.fr

Résumé

Nous présentons dans ce papier la résolution des équations de Saint-Venant par la méthode des volumes-finis. Nous considérons des maillages non-structurés obtenus par le maillage emc^2 . L'implémentation numérique est réalisée par un schéma de volumes finis de type Godunov utilisant le solveur approché de Riemann HLLC bien adapté pour le traitement des ondes de chocs. Grâce à la propriété d'invariance par rotation du flux des équations de Saint-Venant, nous montrons que l'étude du cas 2D découle de la bonne résolution du système monodimensionnel des équations de Saint-Venant. Enfin, nous présentons des résultats numériques des cas-tests de laboratoire ainsi que des résultats de calculs dans la lagune de Cotonou (Rép. Bénin).

Mots-clés : *équations de Saint-Venant, volumes finis, solveur de Riemann HLLC, lagune de Cotonou.*

Abstract

HLLC Riemann solver for 2D shallow water equations and application to the flow in the lagoon of Cotonou

We present in this paper the resolution of the shallow water equations by the method volume-finish. We consider not-structured grids obtained by the maillage emc^2 . The numerical implementation is carried out by a diagram of finished volumes of Godunov type using the approximate Riemann solver HLLC adapted well for the treatment of the shock waves. Thanks to the property of invariance per rotation of the flow of the shallow water equations, we show that the study of the case 2D rises from the good resolution of the monodimensional system of the shallow water equations. Lastly, we have numerical results of the case-tests of laboratory as well as computation results in the lagoon of Cotonou (Rep. Benin).

Keywords : *shallow water equations, finite volumes, HLLC Riemann solver, lagoon of Cotonou.*

1. Introduction

La ville de Cotonou est dans une cuvette ceinturée de plans d'eau et traversée du nord au sud par un chenal, la Lagune de Cotonou, creusé par les Français en 1855. Cette lagune fait 6500 m de long sur 350 m de large et relie le lac Nokoué à l'océan Atlantique (*Figure 1*). Les quelques ouvrages d'assainissement dont dispose

la ville sont généralement en bordure des routes et, pour la plupart, connectés au chenal. Les écoulements d'un tel réseau d'adduction sont des écoulements à surface libre, en eaux peu profondes (shallow water) et sont alors régis par un système bidimensionnel des **Équations** de Saint-Venant. Ces **Équations** sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible en faisant l'hypothèse de pression hydrostatique, de vitesses uniformes suivant la verticale, d'un fond et d'une surface libre imperméables.

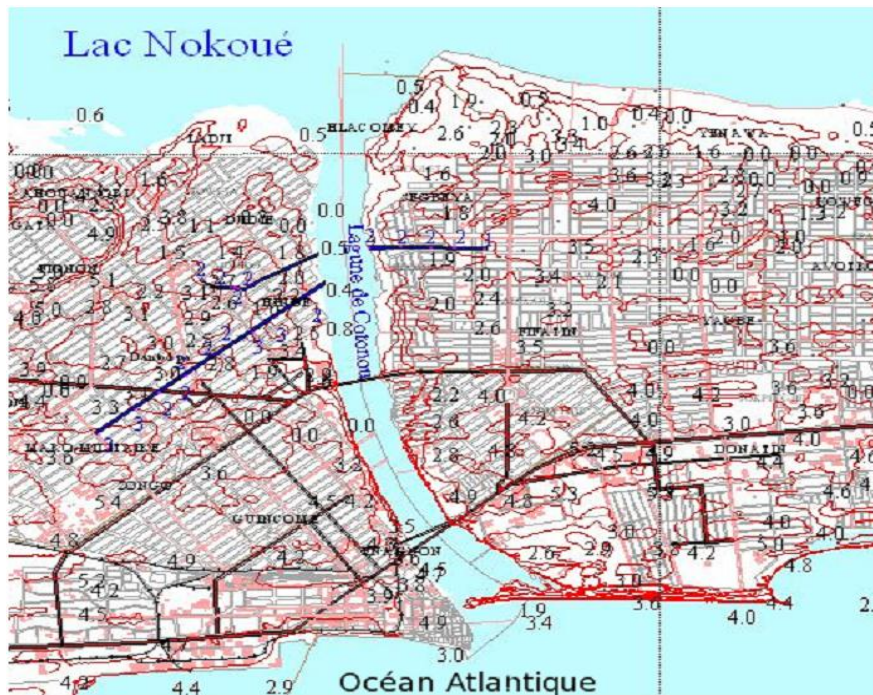


Figure 1 : Chenal de Cotonou

(Source : google map)

Le modèle peut être écrit sous sa forme conservative comme suit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) + \frac{\partial}{\partial y} G(w) = S(w) ; (x, y) \in \Omega, t \geq 0 \quad (1)$$

$$w = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix};$$

$$F(w) = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{qr}{h} \end{pmatrix}; \quad G(w) = \begin{pmatrix} \frac{r}{h} \\ \frac{r^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}; \quad S(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial a}{\partial x} - ghS_f^x \\ -gh \frac{\partial a}{\partial y} - ghS_f^y \end{pmatrix}$$

$$q = hu ; r = hv ; \vec{q} = (q, r).$$

Le système (1) décrit l'écoulement au temps t en un point $(x, y) \in \Omega$, où $h(x, y, t)$ représente la hauteur d'eau au point (x, y) à l'instant t (mesurée de la topographie du fond à la surface libre de l'eau), Ω désigne la projection du domaine occupé par l'eau sur un plan horizontal de référence xy et $a(x, y)$ est la topographie du milieu au point (x, y) . $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ est le système de coordonnées de la vitesse \vec{v} (qui est horizontale dans l'hypothèse Saint-Venant) et g est l'accélération gravitationnelle.

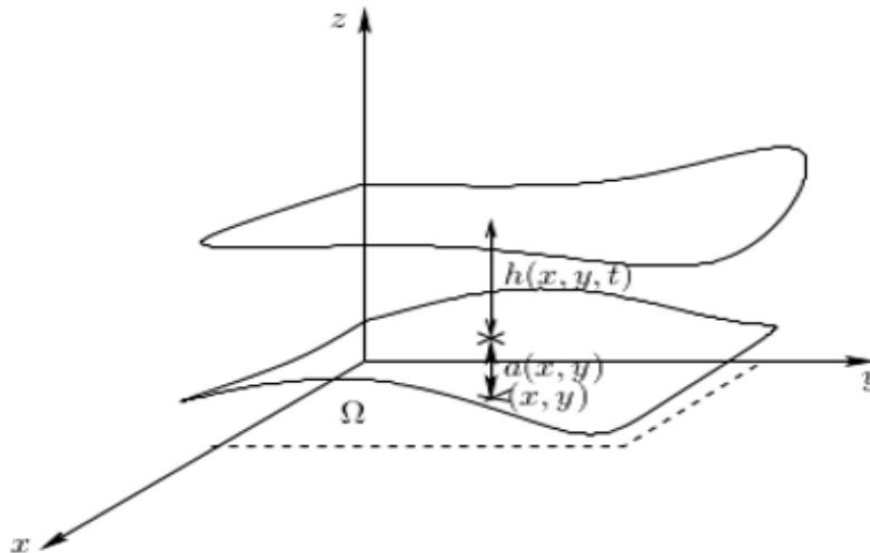


Figure 2 : Représentation géométrique des variables des équations de Saint-Venant

Dans (1), le terme source se compose de deux parties : les pentes topographiques dans les directions de x et y données respectivement par $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial a}{\partial y}$ et le terme de frottement S_f^x et S_f^y dans les mêmes directions. Le terme de frottement est exprimé en utilisant les lois empiriques de Manning :

$$S_f^x = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} ; S_f^y = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2)$$

où, n représente le coefficient de rugosité de Manning.

2. Matériel et méthodes

La démarche méthodologique adoptée dans le cadre de cette étude a consisté en l'intégration numérique (1), le maillage du domaine de la Lagune de Cotonou, le traitement des données, l'analyse et l'interprétation des résultats.

2-1. Bilan des équations

Le traitement numérique du système (1) se fait en deux étapes : traitement des équations sans le terme source puis traitement du terme source. En supposant le terme source nul, le système (1) s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(w) + \frac{\partial}{\partial y} G(w) = 0 \quad (3)$$

Le système (3) peut se mettre sous forme non-conservative :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A(w) \frac{\partial w}{\partial x} + B(w) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

où, $A(w) = \frac{\partial F(w)}{\partial w}$ et $B(w) = \frac{\partial G(w)}{\partial w}$ désignent respectivement les matrices jacobiennes de $F(w)$ et $G(w)$.

L'intégration numérique des équations 2D de Saint-Venant découle de la résolution du système monodimensionnel des équations de Saint-Venant grâce à la propriété d'invariance par rotation du flux de ces **Équations**. En effet : Soit $w: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, $(x, y, t) \mapsto w(x, y, t)$ une solution régulière de (4); R_θ la rotation plane d'angle θ de Ω :

$$R_\theta \begin{pmatrix} h \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (5)$$

Pour tout $(\theta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$, avec les mêmes notations que dans (1), on pose :

$$\Phi(\theta, w) = (\cos\theta)F(w) + (\sin\theta)G(w) \quad (6)$$

Alors on a :

$$\forall (\theta, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}, \Phi(\theta, w) = R_\theta[F(R_{-\theta})(w)] \quad (7)$$

Pour les conditions aux limites, on désigne par Γ le bord du domaine Ω et \vec{n} la normale extérieure unité de Ω . Le bord Γ se décompose comme suit :

$$\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_c \quad (8)$$

avec, Γ_{in} désignant une frontière ouverte où le flux est entrant, Γ_{out} une frontière ouverte où le flux est sortant et Γ_c correspond à une frontière fermée.

- Sur Γ_{in} , nous imposons un débit q_{in} et une condition de Neumann homogène sur la hauteur d'eau :

$$(\vec{q} \cdot \vec{n})|_{\Gamma_{in}}(t) = q_{in}(t), \quad \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_{in}}(t) = 0, \quad \forall t \in]0, T] \quad (9)$$

$$\text{où, } \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_{in}}(t) \equiv \vec{n}(x, y) \cdot \nabla h(x, y, t)|_{\Gamma_{in}}$$

- Sur Γ_{out} , nous imposons :
soit un niveau d'eau z_{out} :

$$h_{out}(t) = z_{out}(t) - a|_{\Gamma_{out}}(t); \quad \left(\frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{n} - \sqrt{gh})}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_{out}}(t) = 0, \quad \forall t \in]0, T] \quad (10)$$

soit une condition de Neumann homogène sur la hauteur et le débit d'eau :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_{out}}(t) = 0; \quad \left(\frac{\partial q}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_{out}}(t) = 0 \quad \forall t \in]0, T] \quad (11)$$

- Sur le bord Γ_c , on impose une condition de glissement parfait sur la vitesse et une condition de Neumann homogène sur la hauteur d'eau :

$$(\vec{v} \cdot \vec{n})|_{\Gamma_c}(t) = 0, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{n}}\right)|_{\Gamma_c}(t) = 0, \quad \forall t \in]0, T] \quad (12)$$

2-2. Intégration numérique

Pour l'approximation de (1) on discrétise le domaine de calcul Ω par un maillage composé de cellules quadrangulaires $K_i, i \in I$ telles que :

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in I} \bar{K}_i$;
- $K_l \cap K_j = \emptyset, \forall (l, j) \in I^2, l \neq j$;
- Le bord ∂K_i de chaque cellule K_i se décompose en 4 interfaces $a_{ij}, j = 1, 2, 3, 4$;
- si a_{ij} est une interface (arête) du bord ∂K_i du quadrangle K_i , il existe un unique quadrangle R tel que $a_{ij} = K_i \cap R$,

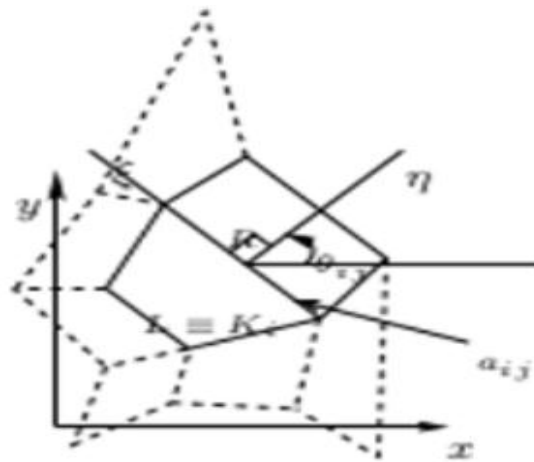


Figure 3 : Cellules adjacentes du maillage

Nous considérons la notation vectorielle symbolique : $\vec{F}(w) = (F(w), G(w))$ et nous allons intégrer (1) sur K_i . Pour cela notons : $\vec{n}_{ij}(\cos\theta_{ij}, \sin\theta_{ij})$ le vecteur normal unitaire extérieur à la $j^{i\text{ème}}$ arête a_{ij} de K_{ij} , formant un angle θ_{ij} avec l'axe des abscisses. On a :

$$\int_{K_i} \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{K_i} \nabla \cdot \vec{F}(w) d\Omega = \int_{K_i} S(w) d\Omega \tag{13}$$

En appliquant la formule de Green-Ostrogradski au volume de contrôle K_i de bord ∂K_i et la propriété d'invariance de flux (7), le terme de flux devient :

$$\int_{K_i} \nabla \cdot \vec{F}(w) d\Omega = \sum_{j=1}^4 \int_{a_{ij}} T_{\theta_{ij}} \left[F(T_{-\theta_{ij}}(w)) \right] ds \tag{14}$$

La méthode des volumes finis repose sur le fait qu'à chaque instant, la solution w est constante par cellule. En notant $|K_i|$ l'aire de la cellule K_i , nous définissons la moyenne de w sur chaque cellule K_i :

$$w_i = \frac{1}{|K_i|} \int_{K_i} w d\Omega \tag{15}$$

Par un solveur de Riemann approché, nous allons calculer une approximation du flux (14) à travers chaque arête a_{ij} à partir de w_i et de $w_{i(j)}$, valeur moyenne de w_i sur le volume adjacent $K_{i(j)} \equiv R$ à K_i par l'arête a_{ij} (**Figure 3**).

En posant $W = T_{-\theta_{ij}}(w)$, $W_L = T_{-\theta_{ij}}(w_i)$, $W_R = T_{-\theta_{ij}}(w_{i(j)})$, $\hat{F}(W_L, W_R)$ le flux normal moyen et S_i une approximation $S(w)$ sur K_i , nous obtenons alors le schéma numérique suivant :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{|K_i|} \sum_{j=1}^4 |a_{ij}| T_{\theta_{ij}}[\hat{F}(W_L^n, W_R^n)] + \Delta t S_i^n \quad (16)$$

où, w_i^n est l'approximation au temps $t^n = n\Delta t$ de w_i .

Une analyse de stabilité sur les équations linéarisées fournit la restriction *CFL* suivante [3] :

$$CFL = \Delta t \frac{\max(\|\vec{v}\|+c)}{\min(d_{L,R})} \leq 1 \quad (17)$$

où, $d_{L,R}$ est la distance entre le centre du volume L et le centre de sa face qui la sépare du volume R .

Il reste à déterminer pour chaque interface de la cellule K_i choisie, et à chaque instant t^n , le flux discret $\hat{F}(W_L^n, W_R^n)$ à travers l'interface considérée.

2-3. Calcul du flux numérique à travers les interfaces des cellules

Nous avons à résoudre à chaque interface le problème de Riemann auquel conduit le modèle 1D des **Équations** de Saint-Venant couplé de la condition initiale :

$$\mathcal{R}(W_L, W_R): \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L, & x < 0 \\ W_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (18)$$

D'après [1], la moyenne de la solution W du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_L, W_R)$ dans la région intermédiaire est :

$$W^{hll} = \frac{S_R W_R - S_L W_L + F_L - F_R}{S_R - S_L} \quad (19)$$

2-4. Solveur de Riemann approché HLLC

Le solveur approché HLLC [9] est une modification du solveur HLL qui prend désormais en compte la présence de l'onde de choc dans la solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_L, W_R)$ ("C" étant mis pour Contact).

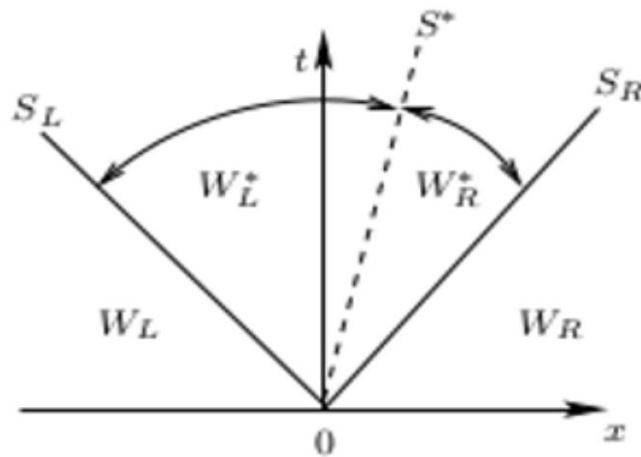


Figure 4 : Solvateur de Riemann Approché HLLC

On suppose connues les vitesses d'ondes S_L, S_R, S^* et on pose $F_K = F(W_K), F_K^* = F(W_K^*), K = L, R$. L'analyse du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_L, W_R)$ permet d'imposer les contraintes :

$$\left. \begin{aligned} h_L^* &= h_R^* \equiv h^* \\ v_L^* &= v_R^* = S^* \\ v_L^* &= v_L \\ v_R^* &= v_R \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Dans contient le flux à travers l'interface entre W_L et W_R du schéma (16) par :

$$\hat{F}^{hllc}(W_L, W_R) = \begin{cases} F_L, & \text{si } S_L \geq 0 \\ F_L^*, & \text{si } S_L \leq 0 \leq S^* \\ F_R^*, & \text{si } S^* \leq 0 \leq S_R \\ F_R, & \text{si } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$S^* = \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \quad (22)$$

3. Résultats et discussion

3-1. Rupture partielle de barrage

Ce cas-test consiste à étudier l'écoulement torrentiel d' Λ à une rupture partielle et asymétrique de barrage. Il est largement utilisé par de nombreux modélisateurs ([2, 4 - 6], etc.) pour valider leurs modèles de rupture de barrage. L'intérêt particulier de ce problème est que sa solution est caractérisée par :

- une onde de choc qui se propage vers l'aval en y augmentant brusquement la hauteur d'eau et se modifie par une onde de réflexion (lorsqu'elle se heurte à la paroi) ;
- une onde de raréfaction (de dépression), qui se déplace vers l'amont en y diminuant la hauteur d'eau, souvent décrite comme choc de raréfaction.

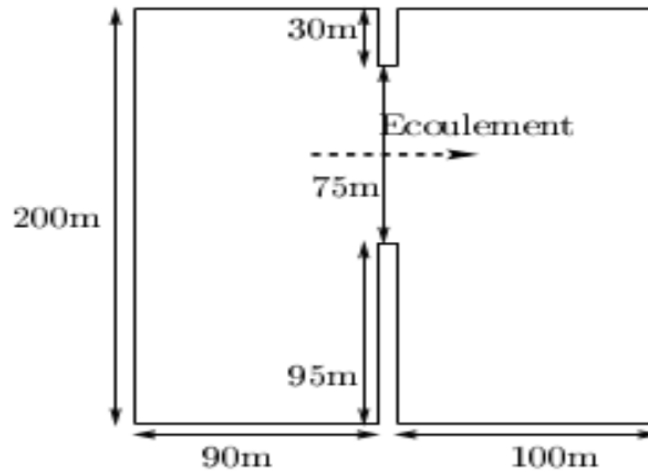
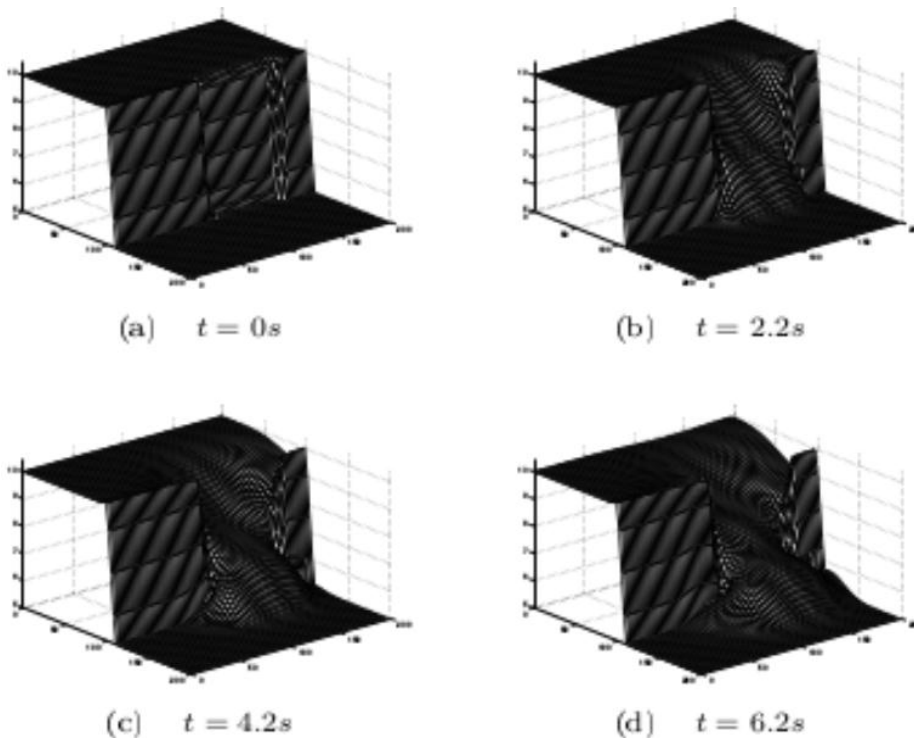


Figure 5 : Rupture partielle de barrage : Géométrie du bassin

Nous étudions un bassin de 200 m de large, 200 m de long et de fond plat, sans frottement. L'eau est retenue dans la partie gauche du bassin. On suppose qu'à $t = 0$, brusquement le barrage du réservoir est en rupture partielle et non symétrique sur une longueur de 75 m. L'épaisseur du barrage est de 10 m sur la direction des écoulements. La **Figure 5** donne une description géométrique de ce problème. Un rapport de $h_2/h_1 = 0.5$ est initialement fixé avec $h_1 = 10\text{m}$ comme hauteur d'eau dans le réservoir et $h_2 = 5\text{m}$ comme hauteur d'eau en aval du barrage. L'eau dans le bassin est en repos à $t = 0$, c'est-à-dire $u = v = 0$ partout. Le bassin est fermé sur les quatre côtés. Une condition de "non glissement" est imposée à toutes les parois. Comme dans [6], le domaine étudié a été discrétisé en 1600 carrés dont le pas d'espace est régulièrement fixé à $\Delta x = 5\text{m}$. Le pas de temps $\Delta t = 0.01\text{s}$ pour toutes les simulations. La durée de simulation est de 10.2s comptée à partir de la rupture de barrage. La **Figure 6** présente les résultats obtenus par le modèle proposé aux instants 2.2 s, 4.2 s, 6.2 s, 7.1 s, 7.2 s, 8.2 s et 10.2 s :



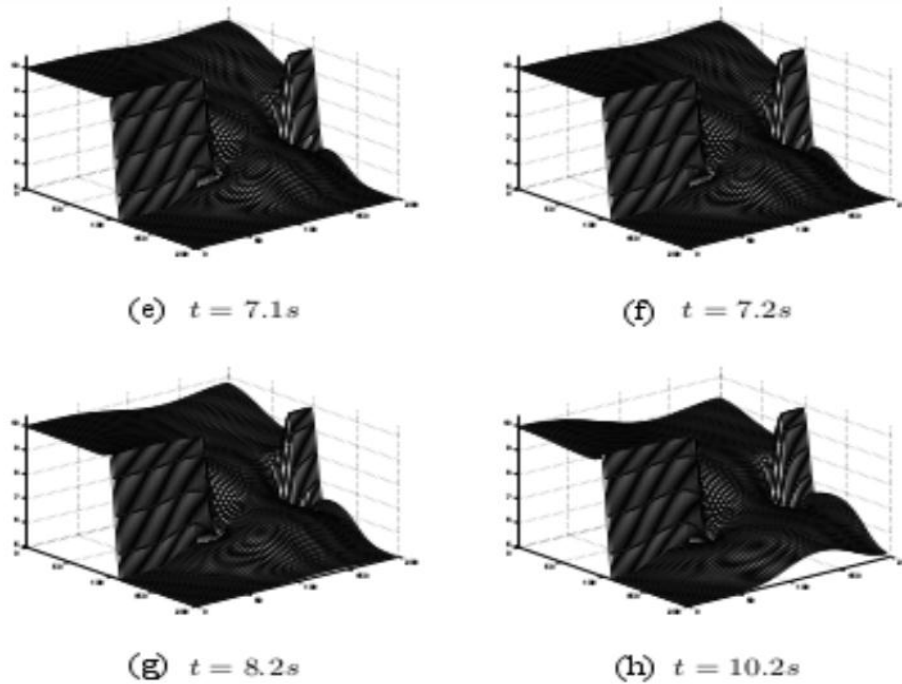


Figure 6 : Rupture partielle de barrage

A $t = 7.1$ s, le front d'onde est parvenu jusqu'à la paroi gauche du bassin ; le front est bien développé dans la partie centrale en aval. Ces résultats semblent très similaires à ceux présentés par les études existantes et précédemment mentionnées. Nous remarquons unhaussement très léger de la surface libre au niveau du front d'onde. On observe également cehaussement dans [6]. Les résultats obtenus par le modèle proposé sont très comparables aux résultats de [6].

3-2. Chute d'eau d'un bassin

Le deuxième problème est l'un des cas-tests du code de Telemac développé à EDF / LNHE et présenté dans [7]; il concerne une baisse de l'eau dans un bassin carré et la solution finale est observée après quelques réflexions sur les bords du bassin. Le bassin est une boîte $20 \times 20 \text{ m}^2$ avec un fond plat. Initialement, l'élévation d'eau du bassin est définie par :

$$h(x, y, t = 0) = 2.4(1 + e^{-0.25[(x-10.05)^2+(y-10.05)^2]}) \quad (23)$$

et l'eau dans le bassin est au repos, c'est-à-dire $u = v = 0$ partout.

Le bassin est fermé sur les quatre côtés. Une condition de "non glissement" est imposée à toutes les parois. Le domaine étudié a été discrétisé en 35282 triangles grâce au logiciel d'Edition de Maillages et contours bidimensionnels *EMC²* [8]. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001\text{s}$. La durée totale de simulation est de $T = 4\text{s}$ comptée à partir de la première solution (**Figure 7-a**). La solution initiale ($t = 0\text{s}$) et les résultats obtenus par notre modèle à $t = 1$ s, 2 s, 3 s et 4 s, respectivement sont représentés par la **Figure 7**. Ces résultats obtenus par notre modèle sont très comparables à ceux présentés dans [7].

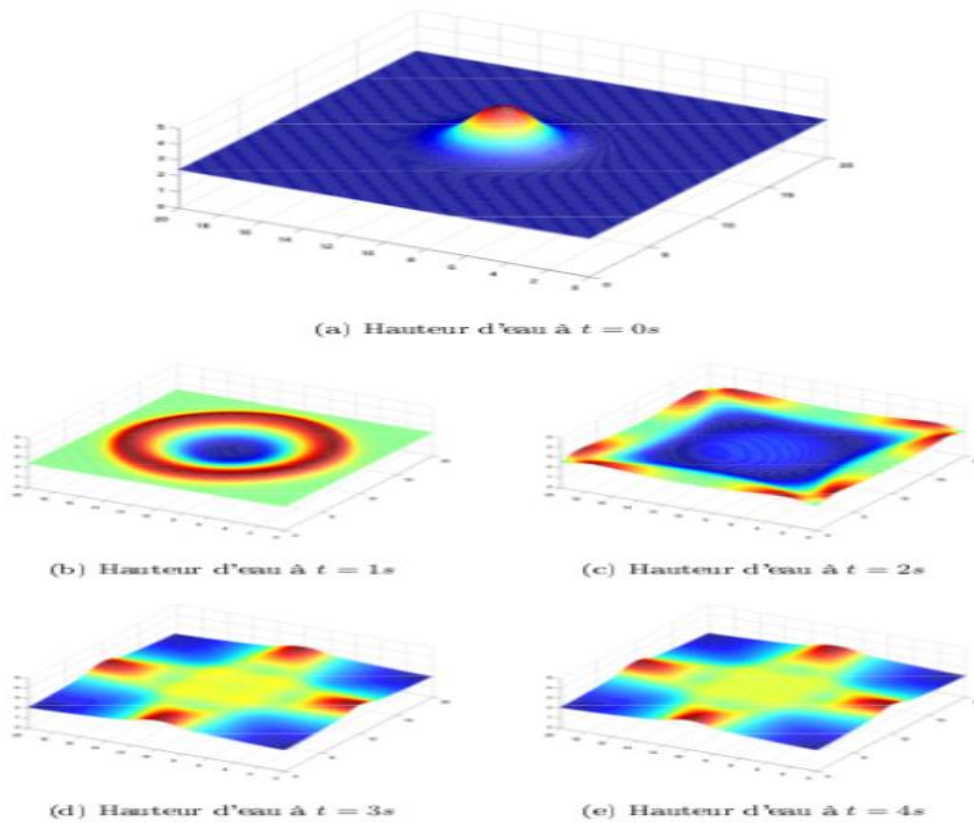


Figure 7 : *Chute d'eau d'un bassin*

3-3. Simulation numérique de l'écoulement dans la lagune de Cotonou

Dans ce troisième cas-test, nous considérons l'écoulement la lagune de Cotonou. Nous faisons l'hypothèse d'un fond plat, des vitesses initiales sont nulles et le niveau du barrage placé à 3000 m. Le maillage du domaine de la Lagune de Cotonou par le logiciel *EMC²* [8].

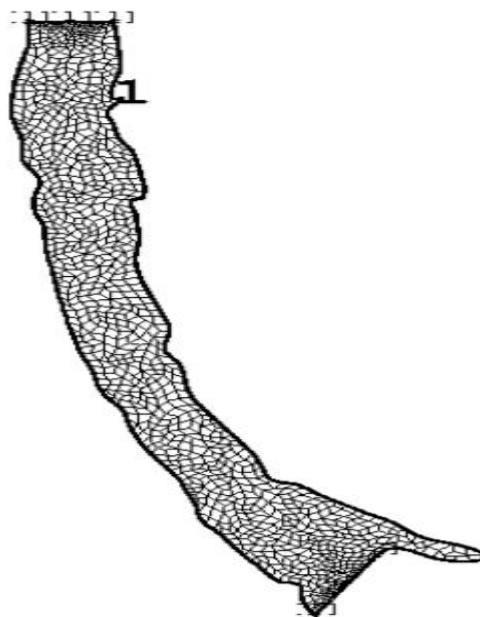


Figure 8 : *Maillage de la lagune de Cotonou : 2 triangles, 1135 quadrangles, 240 arêtes*

La hauteur d'eau initiale est de 2 m avant le barrage et 1.5 m après. Les observations sont réalisées à 1 mn, 3 mn, 5 mn et 10 mn et sont représentées par la **Figure 9**. Elles montrent une bonne stabilité du schéma numérique hllc utilisé.

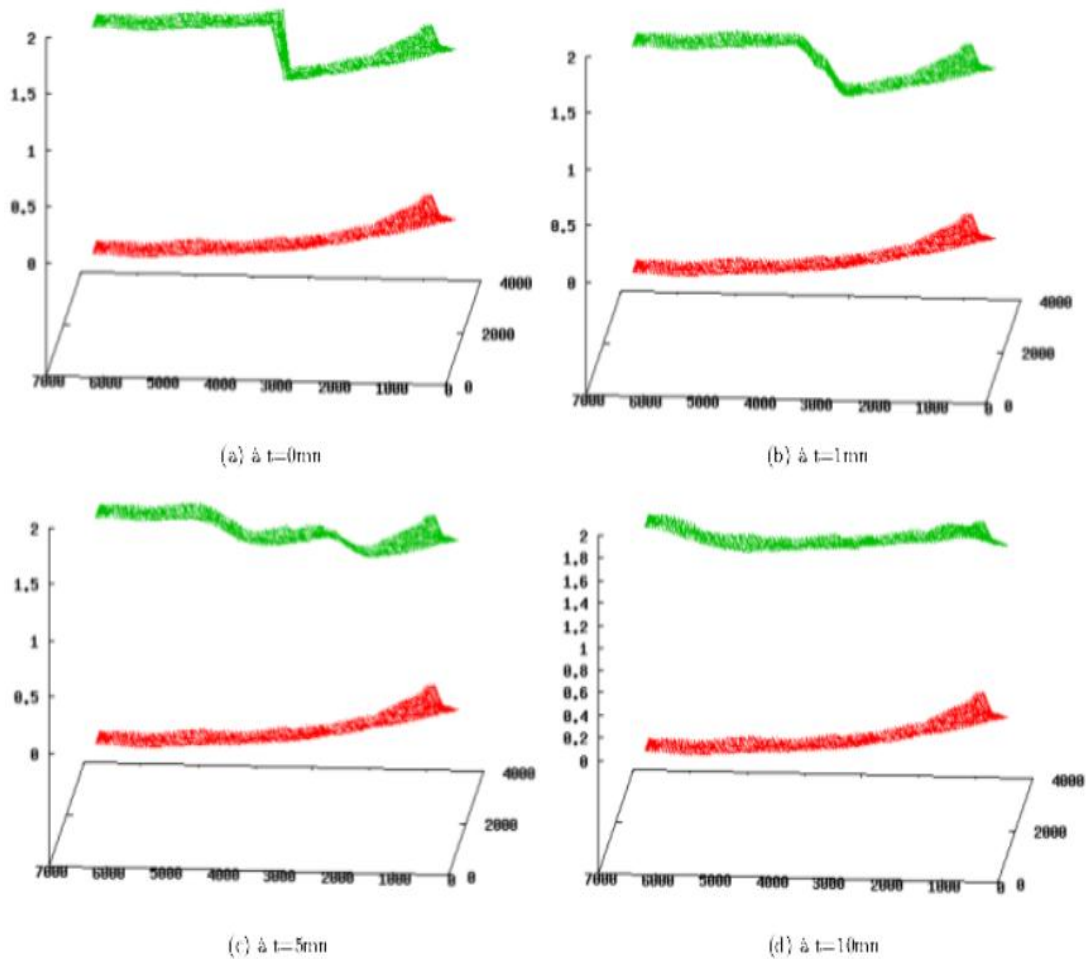


Figure 9 : *Hauteur d'eau de la lagune de Cotonou au Bénin*

4. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article, l'extension des résultats obtenus dans [1] au cas bidimensionnel. Nous avons réalisé l'implémentation numérique par un schéma de volumes finis de type Godunov utilisant le solveur approché de Riemann HLLC bien adapté pour le traitement des ondes de chocs. Grâce à la propriété d'invariance par rotation du flux des équations de Saint-Venant, nous avons montré que l'étude du cas 2D découle de la bonne résolution du système monodimensionnel. Des cas tests réalisés nous ont donné des résultats satisfaisants avec une bonne stabilité du schéma numérique lors des simulations des écoulements dans la lagune de Cotonou (Rép. Bénin).

Références

- [1] - A.-W. BELLO, T. DJARA and A. GOUDJO, Un solveur hllt pour les équations de Saint-Venant et traitement des confluences et des inondations, *Journal de la recherche scientifique de l'Université de Lomé*, ISSN : 1727-8651], (2016), <http://www.ajol.info/index.php/jrsul/issue/view/14675>
- [2] - A. I. DELIS and TH. KATSAOUNIS, Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations by the application of relaxation methods, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 29, (2005) 754 - 783 p.
- [3] - K. S. ERDURAND AND V. KUTIJA and C. J. M. HEWETT, Performance of finite volume solutions to the shallow water equations with shock-capturing schemes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40 (2002) 1237 - 1273 p.
- [4] - S. GUILLOU, Résolution des équations de saint-venant pour les écoulements côtiers Univ Européenne, (2010)
- [5] - Y. LOUKILI and A. SOULAIMANI, Numerical tracking of shallow water waves by the unstructured finite volume WAF approximation, *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Vol. 8, (2007) 1 - 14 p.
- [6] - M. LA ROCCA, A. MONTESSORI, P. PRESTININZI and S. SUCCI, A multispeed Discrete Boltzmann Model for transcritical 2D shallow water flows, *Journal of Computational Physics*, (2015)
- [7] - N. RAFIFE, How to improve the numerical reproducibility of hydrodynamics simulations : analysis and solutions for one open source HPC software, Université de Perpignan Via Domitia (2016), <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01418384/file/main.pdf>
- [8] - E. SATELI and F. HECHT, EMC2 : Un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels, INRIA Research Report, 74 (2006)
- [9] - E.- F. TORO, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Pratical Introduction, Springer, (2009)