

TRANSFERT CONVECTIF DANS LES CAVITES POREUSES SOUMISES A UN CHAMP MAGNETIQUE TRANSVERSAL

AKOWANOU Chr. et DEGAN G.

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Appliquées (LEMA)
Ecole Polytechnique d'Abomey-calavi (EPAC), Université d'Abomey-Calavi
01B.P. 2009, Cotonou (Bénin).

(Reçu le 24 octobre 2006 ; Révisé le 15 mars 2007 ; Accepté le 17 mai 2007)

RESUME

On étudie ici analytiquement les effets de l'anisotropie en perméabilité et celui d'un champ magnétique transversal sur la convection naturelle bidimensionnelle en milieu poreux confiné dans une cavité horizontale. Le milieu poreux, de grande extension est chauffé isothermiquement par les côtés tandis que ses parois horizontales sont thermiquement conductrices ou isolées. Les axes du tenseur de perméabilité sont orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Sur la base d'une analyse d'échelle, les champs de vitesse, de température et le taux de transfert de chaleur ont été déterminés. Ces résultats ont été validés par l'étude des cas limites que sont : les milieux poreux purs et les milieux fluides purs discutés dans la littérature. Il ressort de cette étude que les paramètres d'anisotropie influencent grandement l'écoulement convectif. L'application d'un champ magnétique transversal réduit considérablement la vitesse de l'écoulement et affecte de ce fait le champ de température et le taux de transfert de chaleur.

Mots clés : Milieu poreux, convection, anisotropie, champ magnétique.

ABSTRACT

In this study, both hydrodynamic anisotropy and magnetic effects on buoyancy driven convection in a two dimensional horizontal cavity are investigated analytically. The porous cavity filled with a porous medium is heated isothermally by the sides and its horizontal walls are thermally insulated or conducted. The principal directions of the permeability are oriented in a direction that is oblique to the gravity. Based on scale analysis, solutions for the flow field, temperature distribution, and Nusselt number are obtained. The limiting case corresponding to pure fluid media, and pure porous media, complete this results in order to valid them when compared them to those obtained in the literature. It is found that, temperature and velocity fields are significantly modified, when applying the transverse magnetic field. Also, the effects of anisotropic parameters on the heat transfert are strongly significant.

Key words: Porous media, convection, anisotropy, magnetic field.

INTRODUCTION

La convection thermique dans une cavité poreuse soumise à des gradients thermiques par le côté a fait l'objet d'une grande attention de la part des chercheurs au cours de ces deux dernières décennies à cause de ses applications en géophysique et en ingénierie. D'autres études plus récentes du problème de même importance se sont portées sur l'écoulement convectif magnétohydrodynamique dans les milieux poreux saturés par un fluide conducteur d'électricité. En effet sous l'influence d'un champ magnétique, le mouvement du fluide induit un courant électrique.

Ozoe et coll. [12] ont montré que l'interaction entre ce courant et l'écoulement réduit considérablement la vitesse de l'écoulement convectif. Cet important résultat est exploité dans certaines applications pratiques. Entre autres nous pouvons citer : la conception du processus de refroidissement de certains réacteurs nucléaires fonctionnant sous l'effet de grands champs magnétiques (Vasseur et coll. [10]), le refroidissement de la coulée de métaux fondus pour la fabrication des alliages en industrie (Bian et coll.[8]). Le même résultat a été mis en évidence par Garandet et Alboussière [7] à l'issue de leurs travaux sur la croissance cristalline dans les solutions

hydrothermales. Sur la base du modèle de Brinkman généralisé ; Vasseur et coll. [10] ont ressorti au cours de leur investigation, l'analogie entre la convection naturelle dans un milieu fluide soumis à un champ magnétique de faible intensité (petits nombres de Hartmann Ha) et celle existant dans un milieu poreux saturé par un fluide. Pour un champ de grande intensité, ils ont montré qu'en régime de couche limite le taux de transfert de chaleur varie en $Ra^{2/5}$ (Ra étant le nombre de Rayleigh). Ce résultat est le même que obtenu par Kimura et Bejan [13] à l'issue de l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire chauffée par un flux par le côté. Tabeling [4] a étudié le problème de stabilité dans les mouvements stationnaires de convection en milieu fluide confinée à une cavité rectangulaire à extension infinie. Il ressort de son analyse que l'application d'un champ magnétique horizontal sur la cavité donne naissance à des courants convectifs dont le sens de déplacement s'inverse quand le champ magnétique croît. Ozoe et Maruo [5] se sont intéressés à la convection thermique bidimensionnelle en milieu fluide confinée à une cavité de forme carrée. La cavité est chauffée par le côté tandis que ses parois horizontales sont thermiquement isolées. De leurs travaux on retient que l'application d'un champ magnétique horizontal sur la paroi verticale chaude supprime l'écoulement convectif. De même, la convection naturelle magnétohydrodynamique en milieu fluide conducteur d'électricité a été numériquement étudié par Venkatachalapa et Subbaraya [6]. Ces auteurs ont montré que sous l'effet d'un champ magnétique vertical la température et la vitesse de l'écoulement sont sensiblement modifiées.

Bian et coll. [8] ont mené une investigation analytique et numérique pour rechercher l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité poreuse étroite disposée dans une position inclinée. Le milieu poreux isotrope est saturé par un fluide conducteur d'électricité. Un champ magnétique est appliqué perpendiculairement sur le côté par lequel la cavité est chauffée ; ses parois supérieure et inférieure étant thermiquement isolées. Sur la base du modèle de Darcy, ils ont montré que le taux de transfert de chaleur (nombre de Nusselt) est fonction des paramètres que sont : le nombre de Rayleigh (Ra), le rapport de forme de la cavité (A) et le nombre de Hartmann (Ha). Ainsi en l'absence de champ magnétique ($Ha=0$) le nombre de Nusselt calculé s'apparente à celui prédit par Bejan [14] lors de l'étude en régime de couche limite de la convection naturelle dans une cavité poreuse chauffée

isothermiquement sur les côtés. De leur analyse on retient que la variation de l'inclinaison de la cavité affecte grandement le phénomène de convection qui disparaît progressivement lorsque l'intensité du champ magnétique croît. Pour une cavité poreuse chauffée par le bas il existe un nombre de Rayleigh critique (Ra_{cr}) en dessous duquel le phénomène de convection est inexistant. Lorsque le champ magnétique est nul ($Ha = 0$) ce résultat conduit à la valeur $4\pi^2$; nombre de Rayleigh critique trouvé par Lapwood [15] dans les mêmes conditions d'étude.

Dans la plupart des situations physiques envisagées dans les recherches ci-dessus citées le milieu poreux est homogène et isotrope par hypothèse. Ce ne sont là que des hypothèses simplificatrices introduites pour approcher la réalité. Pour une bonne modélisation, la prise en compte des propriétés physiques de la matrice solide du milieu poreux est déterminante. De l'étude numérique et analytique du phénomène de la convection naturelle en milieu poreux anisotrope conduite par Degan [1] nous retenons que les paramètres d'anisotropie influencent grandement le phénomène de convection.

Dans la présente étude il a été examiné l'influence des paramètres d'anisotropie en perméabilité du milieu poreux et l'effet du champ magnétique transversal sur l'écoulement convectif et le transfert de chaleur dans une cavité poreuse horizontale. Il a été envisagé au cours de l'étude deux cas de figure correspondant aux situations dans lesquelles les parois horizontales de la cavité ont été envisagées thermiquement isolées d'une part et thermiquement conductrices d'autre part.

Nomenclature

- A : rapport de forme de la cavité
- a, b, c : constantes, équation (12)
- B : champ magnétique appliqué
- C_p : chaleur spécifique à pression constante
- Da : nombre de Darcy
- g : accélération de la pesanteur
- H : hauteur de la cavité
- Ha : nombre de Hartmann
- J : densité de courant
- k : conductivité thermique
- K_1, K_2 : perméabilités suivant les axes principaux
- K^* : rapport d'anisotropie en perméabilité
- $\underline{\underline{K}}$: tenseur (de second ordre) de perméabilité équation (5)

L : longueur de la cavité
 L_x : longueur de la région centrale de la cavité
 Nu : nombre de Nusselt
 Ox', Oy' : axes de coordonnées cartésiennes.
 p' : pression
 q'_c : chaleur par conduction
 q'_c : chaleur par convection
 Ra_H : nombre de Rayleigh basé sur la hauteur
 t : temps
 T'_0 : température de référence au centre géométrique de la cavité
 T : température adimensionnelle équation (20)
 T_1 : température dimensionnelle à la paroi froide
 T_2 : température dimensionnelle à la paroi chaude
 ΔT : différence de température pariétale dimensionnelle ($T_2 - T_1$)
 u, v : vitesses adimensionnelles dans les directions Ox et Oy , équation (20)
 \vec{V}' : vitesse de filtration
 x, y : coordonnées cartésiennes dimensionnelles, équations (20)

Lettres grecques

α : diffusivité thermique
 β : coefficient d'expansion thermique du fluide
 λ : viscosité relative
 γ : conductivité électrique du fluide
 θ : angle d'orientation des directions Principales de tenseur de perméabilité
 $\vec{\nabla}$: vecteur nabla, $(\partial/\partial x)\vec{i} + (\partial/\partial y)\vec{j}$
 μ : viscosité dynamique du fluide, $\nu\rho$
 μ_{eff} : viscosité dynamique apparente pour le modèle Brinkman,
 ρ : masse volumique du fluide
 ρ_0 : masse volumique du fluide à T'_0
 ν : viscosité cinématique
 φ : porosité du milieu poreux
 ϕ : potentiel électrique
 $(\rho c_p)_m$: capacité calorifique du milieu poreux

$(\rho c_p)_f$: capacité calorifique du fluide
 σ : rapport des capacités calorifiques,

Exposants

' : relatifs aux grandeurs dimensionnelles

Indices

o : état de référence.

1. Modèle physique et formulation mathématique

On considère ici une cavité rectangulaire à parois planes. L'une des parois limitantes de cette cavité est chauffée à température constante T_2 tandis que la paroi opposée est maintenue à température T_1 ($T_1 < T_2$).

Cette enceinte de hauteur H et de longueur L est remplie par un milieu poreux saturé par un fluide incompressible conducteur d'électricité supposé en équilibre thermodynamique local avec le milieu.

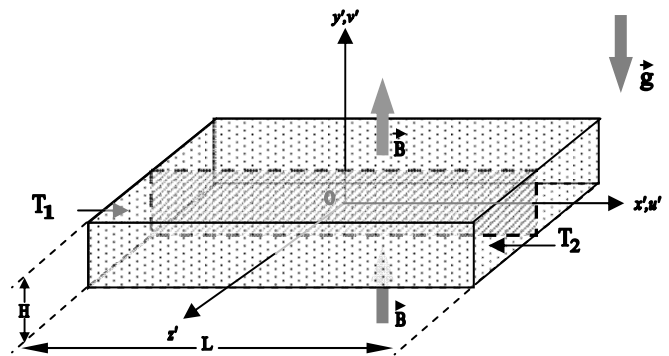


Figure 1.1: Modèle physique de la cavité contenant le milieu poreux.

Le milieu poreux est considéré anisotrope en perméabilité avec des axes principaux orientés obliquement par rapport au champ gravitationnel. Les composantes K_1 et K_2 de la perméabilité font un angle θ par rapport aux axes de coordonnées. L'anisotropie du milieu est caractérisée par le rapport $K^* = K_1 / K_2$.

La cavité est placée dans un espace champ magnétique vertical. L'application d'un gradient thermique sur les faces latérales de l'enceinte engendre dans le milieu la convection naturelle induite par la poussée d'Archimède. Rapportons le milieu poreux à un système d'axes rectangulaires

(Ox', Oy') tels que les axes de coordonnées soient orientés dans les directions horizontale et verticale.

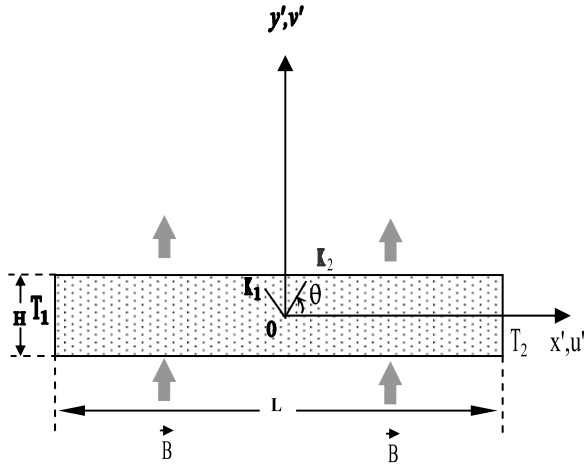


Figure 1.2 : modèle physique et axes de coordonnées

On considère le régime permanent établi et écoulement complètement développé dans les canaux poreux.

Négligeant l'effet Joule sur le transfert de chaleur et en supposant faible le champ magnétique induit devant celui imposé, les équations gouvernant les transferts de masse, de quantité de mouvement, de chaleur et de charges électriques dans le milieu poreux anisotrope s'écrivent (Degan [1], Garandet et Albuossière [7], Vasseur et coll. [10]) respectivement :

$$\nabla \vec{V}' = 0 \quad (1)$$

$$\vec{V}' = \frac{\vec{K}}{\mu} [-\nabla p' + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \vec{V}' + \rho \vec{g} + \vec{J} \times \vec{B}] \quad (2)$$

$$\nabla \vec{J}' = 0; \quad \vec{J}' = \gamma (-\nabla \Phi + \vec{V}' \times \vec{B}) \quad (3)$$

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T'}{\partial t} + (\rho c_p)_f \nabla \cdot (\vec{V}' T') = k \nabla^2 T' \quad (4)$$

\vec{K} représente le tenseur de perméabilité du milieu poreux dans le système d'axes illustré à la Figure 1.2. C'est un tenseur d'ordre 2 qui s'écrit suivant le système d'axes de coordonnées (Figure 1.2) :

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta & (K_2 - K_1) \sin \theta \cos \theta \\ (K_2 - K_1) \sin \theta \cos \theta & K_2 \cos^2 \theta + K_1 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

Le milieu poreux étant électriquement isolé, alors le champ électrique y est partout nul. Sur cette base on a :

$$\nabla \Phi = 0 \quad (6)$$

La deuxième équation (3) se réécrit :

$$\vec{J}' = \gamma (\vec{V}' \times \vec{B}) \quad (7)$$

En utilisant les coordonnées (u', v') de la vitesse de filtration \vec{V}' , définies dans le plan (Ox', Oy') illustré à la Figure 1.2, les équations (1), (2), (3) et (4) décrivant le phénomène de convection en milieu poreux anisotrope en perméabilité, formulées en variables primitives s'écrivent :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (8)$$

$$b u' - c v' = \frac{K_1}{\mu} \left(-\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 u' - \gamma u' B^2 \right) \quad (9)$$

$$-c u' + a v' = \frac{K_1}{\mu} \left(-\frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 v' - \rho g \right) \quad (10)$$

$$\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (11)$$

où :

$$\begin{cases} a = K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ b = K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ c = (1 - K^*) \sin \theta \cos \theta \\ K^* = \frac{K_1}{K_2} \end{cases} \quad (12)$$

Dans l'équation (11), $\sigma = (\rho c_p)_m / (\rho c_p)_f$ est le rapport des capacités calorifiques et $\alpha = k / (\rho c_p)_f$ la diffusivité du milieu poreux.

En supposant faibles les variations de température dans le milieu poreux, l'approximation de Boussinesq est postulé et s'écrit comme suit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T' - T'_0)] \quad (13)$$

Les conditions aux limites du problème s'écrivent :

• Conditions hydrodynamiques :

Elles se traduisent (dans le modèle de *Brinkman*)

par la par condition d'adhérence aux parois :

* Sur les parois verticales on a :

$$x' = \pm \frac{L}{2}, \quad v' = 0 \quad (14)$$

* Sur les parois horizontales on a :

$$y' = \pm \frac{H}{2}, \quad u' = 0 \quad (15)$$

• Conditions thermiques :

* Sur les parois verticales

$$x' = -\frac{L}{2} \quad T' = T_1 \quad (16)$$

$$x' = \frac{L}{2} \quad T' = T_2 \quad (17)$$

* Sur les parois horizontales ; deux cas sont à envisager :

$$y' = \pm \frac{H}{2} \quad \frac{\partial T'}{\partial y'} = 0 \quad (18)$$

(pour des parois adiabatiques)

$$y' = \pm \frac{H}{2} \quad T' = \frac{\Delta T}{L} x' \quad (\text{pour des parois thermiquement conductrices}) \quad (19)$$

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} (x, y) = (x', y') / (\alpha / H) \\ T = (T' - T_1) / \Delta T \\ (u, v) = (u', v') / (\alpha / H) \end{cases} \quad (20)$$

Les équations gouvernantes (8), (9), (10) (11) après élimination de la pression s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

$$(a + Ha^2) \frac{\partial u}{\partial y} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - b \frac{\partial v}{\partial x} = -Ra_H \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda Da \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (22)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (23)$$

où

$Ha = B(K_I \gamma / \mu)^{1/2}$ est le nombre de *Hartmann*, $Ra_H = K_1 g \beta H \Delta T / (\alpha \nu)$ est le nombre de *Rayleigh* basé sur la hauteur de la cavité, $Da = K_1 / H^2$ est le nombre de *Darcy* ; et $\lambda = \mu_{\text{eff}} / \mu$ est la viscosité relative.

En pratique, l'approximation $\mu_{\text{eff}} \approx \mu$ est souvent utilisée. Par conséquent, λ sera pris égal à l'unité.

De même les équations aux limites (14), (15), (16), (17), (18) et (19) devant être associées aux équations (21), (22), (23) s'écrivent :

* Sur les parois verticales :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2A} & v = 0 & T = 0 \\ x = \frac{1}{2A} & v = 0 & T = 1 \end{cases} \quad (24a)$$

* Sur les parois horizontales :

$$y = \pm \frac{1}{2}, \quad u = 0 \quad (24b)$$

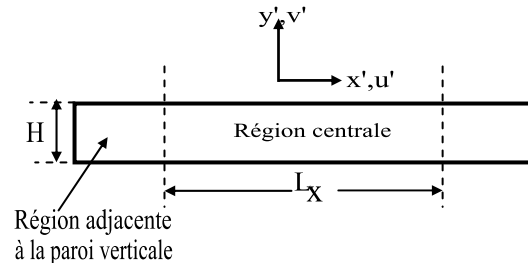
$$y = \pm \frac{1}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{parois adiabatiques}) \quad (24c)$$

$$y = \pm \frac{1}{2} \quad T = Ax \quad (\text{parois thermiquement conductrices}) \quad (24d)$$

où $A = H / L$ est le rapport de forme géométrique de la cavité.

2. Résolution des équations

Intéressons-nous dans cette partie à la région centrale de la cavité :



L_x et H sont les échelles caractéristiques des variables x et y dans la région centrale de la cavité :

$$y \sim H \quad ; \quad x \sim L_x \quad (25)$$

Selon l'analyse d'échelle (25), sur la base de l'équation (21) nous pouvons écrire :

$$\frac{u}{v} \sim \frac{L_x}{H} \quad \text{alors} \quad \frac{u}{L_x} \sim \frac{v}{H}$$

puisque : $A = \frac{H}{L} \ll 1$ et $L > L_x$

alors

$$\frac{L}{H} \gg \frac{L_x}{H} \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{v} \gg 1$$

De ce qui précède, nous déduisons que l'écoulement dans la région centrale de la cavité est développé dans la direction horizontale ox' comme il a été discuté en détail dans le passé par Cormack et Coll. [11], Vasseur et Coll. [10]. Ainsi :

$$u = u(y) \quad (26)$$

Suivant l'équation (21) :

$$v = 0 \quad (27)$$

Par conséquent, la température dans la région centrale de la cavité ne dépend que de l'ordonnée y :

$$T = T(y) \quad (28)$$

Dans les mêmes conditions d'application du gradient thermique sur les parois d'une cavité horizontale contenant un milieu fluide, *Birikh* [9], a montré par le passé que le gradient thermique le long de l'axe horizontal ox' est constant. Ainsi :

$$\frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\Delta T}{L} \quad (29)$$

En y introduisant les variables adimensionnelles, expressions (20) on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = A \quad (30)$$

Tenant compte des relations (26), (27), (28), (30) les équations (22) et (23) s'écrivent pour $\lambda = 1$:

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - \frac{a + Ha^2}{Da} \frac{du}{dy} = \frac{ARa_H}{Da} \quad (31)$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = Au \quad (32)$$

2.1 Vitesse de l'écoulement

De l'équation (31) la vitesse de l'écoulement en milieu poreux est donnée par l'équation différentielle d'ordre 3 suivante :

$$\frac{d^3 u}{dy^3} - \varepsilon^2 \frac{du}{dy} = \frac{ARa_H}{Da} \quad (33)$$

où

$$\varepsilon^2 = \frac{a + Ha^2}{Da} \quad (34)$$

Ainsi après l'exploitation judicieuse des conditions aux limites (24b) et la condition basée sur la centrosymétrie du champ d'écoulement, la vitesse d'écoulement selon (33) s'écrit :

$$u = \frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \left(\frac{\varepsilon \sinh(\varepsilon y)}{2 \sinh \frac{\varepsilon}{2}} - y \right) \quad (35)$$

Intéressons-nous dans la suite, à deux cas limites comprenant les milieux à faibles porosités $Da \rightarrow 0$ (milieux poreux purs) et les milieux à porosités élevées $Da \rightarrow \infty$ (milieux fluides purs) afin de discuter de la validité de nos résultats.

Vitesse de l'écoulement :

* **En milieu fluide pur** ($Da \gg 1$) :

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$. En écrivant le développement de l'expression (37) en série de puissances entières de y à l'ordre 3, nous trouvons :

$$u = \frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \left[(24 - \varepsilon^2) \left(\frac{1}{6}y + \frac{\varepsilon^2}{36}y^3 + \frac{1}{720}y^5 \right) - y \right] \quad (36)$$

* **En milieu poreux pur** ($Da \ll 1$)

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow \infty$; la distribution de vitesse (35) s'écrit :

$$u = \frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \left(\frac{e^{\varepsilon(y - \frac{1}{2})}}{2} - y \right) \quad (37)$$

L'expression (37) s'identifie à celle obtenue par *Garandet* et *Alboussière* [7] dans la limite de petits nombres de *Hartmann*.

2.2 Distribution de température

• Cas des parois horizontales adiabatiques

Sur la base des expressions (35), (30); l'intégration de l'équation (32) donne en tenant compte de la condition aux limites (24c) la distribution de température suivante :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[\frac{\sinh(\varepsilon y)}{2\varepsilon^2 \sinh \frac{\varepsilon}{2}} - \frac{1}{6}y^3 + y \left(\frac{1}{8} - \frac{\cosh \frac{\varepsilon}{2}}{2\varepsilon \sinh \frac{\varepsilon}{2}} \right) \right] + Ax \quad (38)$$

*** En milieu poreux pur (Da << 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$ la distribution de température en milieu poreux pour des parois horizontales adiabatiques s'écrit :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[\frac{e^{\varepsilon \left(\frac{y-1}{2} \right)}}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{6} y^3 + y \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\varepsilon} \right) \right] + Ax \quad (39)$$

*** En milieu fluide pur (Da >> 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$. En écrivant le développement de l'expression (38) en série de puissances entières de ε à l'ordre 5 nous obtenons :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[y \left(\frac{3}{\varepsilon^2} - \frac{1}{8} + \frac{\varepsilon^2}{120} \right) + y^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{36} \right) + y^5 \left(24 - \varepsilon^2 \right) \frac{\varepsilon^2}{720} \right] + Ax \quad (40)$$

L'expression (40) est identique à celle obtenue par *Vasseur* et *Hasnaoui* [2] dans la limite de petits nombres de Hartmann.

• Cas des parois horizontales thermiquement conductrices

Sur la base des expressions (35), (30) ; l'intégration de l'équation (32) donne en tenant compte de la condition aux limites (24d) la distribution de température suivante :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[\frac{\sinh \varepsilon y}{2\varepsilon^2 \sinh \frac{\varepsilon}{2}} - \frac{1}{6} y^3 + y \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \right] + Ax \quad (41)$$

*** En milieu poreux pur (Da << 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow \infty$, l'expression de la température (41) s'écrit :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[\frac{e^{\varepsilon \left(\frac{y-1}{2} \right)}}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{6} y^3 + y \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \right] + Ax \quad (42)$$

*** En milieu fluide pur (Da >> 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$. Le développement de l'expression (41) en série de puissances entières de ε à l'ordre 5 permet d'écrire :

$$T = \frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \left[y \left(\frac{3}{\varepsilon^3} - \frac{1}{8} \right) + y^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{36} \right) + y^5 \left(24 - \varepsilon^2 \right) \frac{\varepsilon^2}{720} \right] + Ax \quad (43)$$

L'expression (43) est identique à celle obtenue par *Garandet* et *Alboussière* [7] dans le cas d'un champ magnétique transversal de faible intensité (Ha faible).

3. Le taux de transfert de chaleur

Le nombre de Nusselt moyen mesurant le transfert thermique à travers la couche poreuse est évalué sur la paroi verticale droite et chaude par la relation :

$$Nu = \frac{q'}{q'_c} \quad (44)$$

où $q'_c = kH\Delta T / L$ est la chaleur par conduction pure à travers la couche poreuse

$$q' = \int_{-H/2}^{H/2} \left[k \frac{\partial T'}{\partial x'} - (\rho c_p)_f u' T' \right] dy' \quad \text{est la}$$

chaleur par convection à travers la couche poreuse. En variables adimensionnelles le taux de transfert s'écrit :

$$Nu = \frac{1}{A} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} - uT \right) dy \quad (45)$$

Compte tenu des conditions aux limites envisagées, nous ferons le calcul du taux de transfert de chaleur dans deux cas :

• Parois horizontales adiabatiques

En tenant compte de l'expression (38) de T et de l'expression (35) de la vitesse u, il vient que :

$$Nu = 1 + \left(\frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left[\frac{1}{120} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{24\varepsilon} \coth \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon \sinh \frac{\varepsilon}{2}} (I_1 + I_2 - I_3) \right] \quad (46)$$

où

I_1, I_2, I_3 sont définies par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\sinh \varepsilon - \varepsilon}{8\varepsilon^2 \sinh \frac{\varepsilon}{2}} & I_2 &= \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) \cosh \frac{\varepsilon}{2} \\ I_3 &= \frac{1}{4\varepsilon} \coth \frac{\varepsilon}{2} \cosh \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

* **En milieu poreux pur (Da << 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$ l'expression du Nusselt (46) s'écrit :

$$Nu = 1 + \left(\frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{24\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{5}{8\varepsilon^3} + \frac{2}{\varepsilon^4} \right) \quad (48)$$

* **En milieu fluide pur (Da >> 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow \infty$ l'expression du Nusselt (46) s'écrit :

$$Nu = 1 + \left(\frac{A^2 Ra_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left(\frac{89}{5760} - \frac{1}{1920\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon^2} - \frac{1}{24\varepsilon^3} + \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{1}{\varepsilon^5} + \frac{7}{23040}\varepsilon^2 - \frac{77}{460800}\varepsilon^4 \right) \quad (49)$$

• **Parois horizontales thermiquement conductrices :**

A partir des expressions (35) et (41) portées dans (45), il vient que :

$$Nu = 1 + \left(\frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left[\frac{1}{720} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{3}{\varepsilon^2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\varepsilon \sinh \frac{\varepsilon}{2}} \left[I_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{\varepsilon^2} \right) \cosh \frac{\varepsilon}{2} \right] \right] \quad (50) \text{ où}$$

I_1 est définie parmi les expressions (47).

* **En milieu poreux pur (Da << 1) :**

Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow 0$ l'expression du Nusselt (50) s'écrit :

$$Nu = 1 + \left(\frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{24\varepsilon} - \frac{1}{4\varepsilon^2} - \frac{7}{4\varepsilon^3} + \frac{3}{\varepsilon^4} \right) \quad (51)$$

* **En milieu fluide pur (Da >> 1) :**

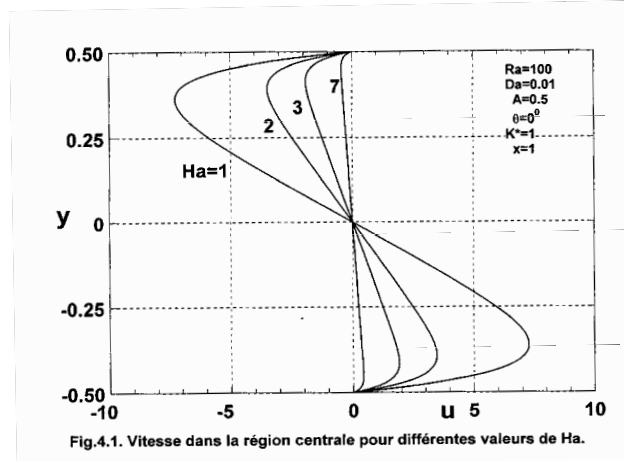
Suivant l'équation (34) $\varepsilon \rightarrow \infty$ l'expression du Nusselt (50) s'écrit :

$$Nu = 1 + \left(\frac{ARa_H}{\varepsilon^2 Da} \right)^2 \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{139}{230400}\varepsilon^2 - \frac{7}{614400}\varepsilon^4 \right) \quad (52)$$

4. RESULTATS ET DISCUSSION

Dans cette partie quelques figures illustrant les effets des paramètres d'anisotropie et du champ magnétique sur l'écoulement convectif ont été faites.

La Figure 4.1 illustre la distribution de la vitesse u expression (35) dans la région centrale du milieu poreux lorsque $Da=10^{-2}$, $K^*=1$, $\theta = 0^\circ$, $Ra = 100$, $A=0.5$ et pour différentes valeurs du nombre de *Hartmann* Ha .



Les divers profils de la vitesse observés révèlent une atténuation progressive de l'écoulement convectif lorsque le nombre de *Hartmann* Ha croît. Nous observons aussi une symétrie du champ d'écoulement par rapport à l'axe central du milieu poreux; qui témoigne d'une inversion du sens de l'écoulement chaque fois que ce dernier est au contact des parois horizontales limitantes de l'enceinte. Pour différentes valeurs du nombre de *Hartmann* Ha , nous remarquons que la vitesse de l'écoulement à la paroi est nulle; ce qui traduit la condition d'adhérence à la paroi relativement au modèle de *Brinkman* généralisé adopté.

Les effets du nombre de *Hartmann* Ha sur le profil de la température dans la région centrale de la cavité sont présentés sur la Figure 4.2 lorsque $Ra = 100$, $Da=10^{-2}$, $A=0.5$, $\theta = 0^\circ$, $x = 1$ et $K^*=1$.

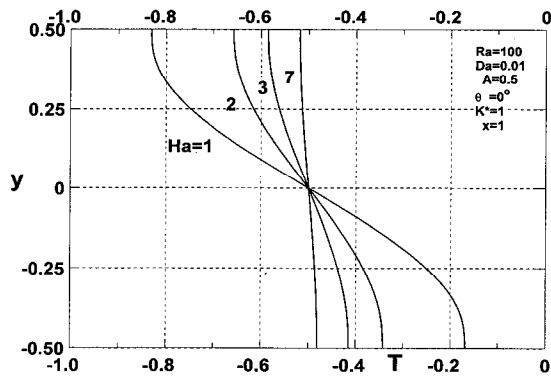


Figure 4.2 : Température dans la région centrale de la cavité pour différentes valeurs de Ha .

Les résultats indiquent d'une part que le champ de température présente une symétrie par rapport à l'axe central du milieu poreux. D'autre part, la température en milieu poreux décroît lorsqu'on augmente la valeur du nombre de *Hartmann*.

La Figure 4.3 illustre les variations du taux de transfert de chaleur dans le milieu poreux en fonction du nombre de *Hartmann* Ha pour différentes valeurs du rapport des perméabilités K^* lorsque $Ra=50$, $Da=0.05$, $\theta=45^\circ$, $A=0.2$.

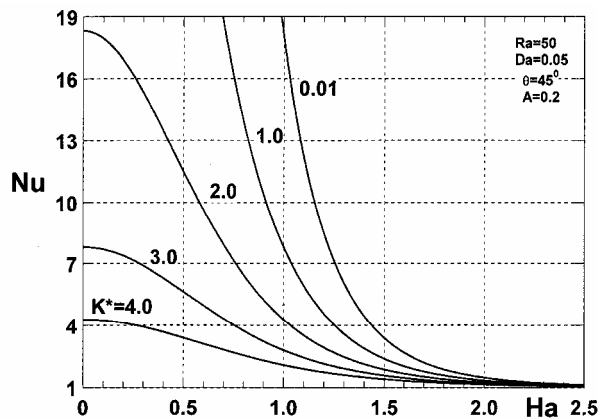


Figure 4.3 : Effet de Ha sur le taux de transfert de chaleur pour différentes valeurs de K^* .

De l'analyse des courbes de la Figure 4.3, il ressort que le transfert de chaleur par convection pour chaque valeur de K^* , diminue progressivement jusqu'en régime de conduction pure pour lequel $Nu=1$ lorsque Ha croît. La valeur de K^* pour laquelle le régime de conduction pure est atteint dépend du nombre de

Hartmann, donc du champ magnétique transversal. Par exemple pour $K^*=4$ lorsque $Ha=2.5$, le régime de conduction pure est presque atteint.

Il est à noter aussi que le transfert de chaleur par convection croît avec l'augmentation du nombre de *Hartmann* lorsque le rapport d'anisotropie en perméabilité K^* du milieu poreux diminue.

Il résulte de cette analyse que, lorsque $\theta=45^\circ$, le transfert de chaleur croît lorsque la perméabilité du milieu poreux dans la direction horizontale est plus élevée par rapport à celle régnant dans la direction verticale ($K^*<1$) et décroît lorsqu'on assiste à la situation inverse pour laquelle $K^*>1$.

La Figure 4.4 illustre les variations du taux de transfert de chaleur en milieu poreux en fonction du nombre de *Hartmann* Ha pour différentes valeurs du nombre de *Rayleigh* Ra_H lorsque $Da=10^{-3}$, $K^*=1$, $\theta=0^\circ$ et $A=0.3$.

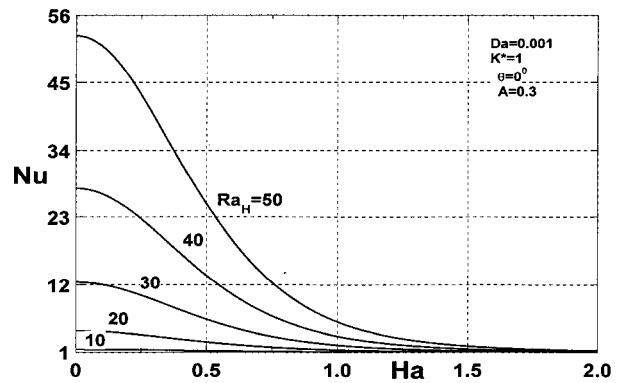


Figure 4.4: Effet de Ha sur le transfert de chaleur pour différentes valeurs de Ra_H

Cette Figure montre que le transfert de chaleur par convection pour chaque valeur du nombre de *Rayleigh* Ra_H diminue rapidement jusqu'en régime de conduction pure pour lequel $Nu=1$ lorsque le nombre de *Hartmann* Ha croît.

La valeur de Ra_H pour laquelle le régime de conduction pure est atteint dépend du nombre de *Hartmann*, donc du champ magnétique transversal. Par exemple, pour $Ra_H=50$ le régime de conduction pure est atteint lorsque $Ha=2$ tandis que pour $Ra_H=30$, il est atteint à $Ha=1.5$.

Par ailleurs, nous notons que le transfert de chaleur par convection croît dans la limite de faibles nombres

de *Hartmann* Ha ($Ha < 1.5$) lorsque le nombre de *Rayleigh* Ra_H croît.

Les effets de la variation du nombre de *Darcy* Da sur le taux de transfert de chaleur dans le milieu poreux sont présentés à la Figure 4.5 pour $Ra=40$, $Ha=1.5$, $K^*=5$, $A=0.4$ et pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ des axes principaux du milieu poreux. Lorsque le nombre de *Darcy* croît les effets de l'inclinaison des axes principaux du milieu poreux deviennent de plus en plus importants ; aussi le taux de transfert de chaleur dans la cavité croît de façon significative. Le transfert de chaleur est maximal pour $\theta=90^\circ$ et minimal pour $\theta=0^\circ$.

Nous concluons que le transfert de chaleur est maximal lorsque l'axe principal ayant la perméabilité la plus faible du milieu poreux anisotrope est orienté parallèlement par rapport à la gravité.

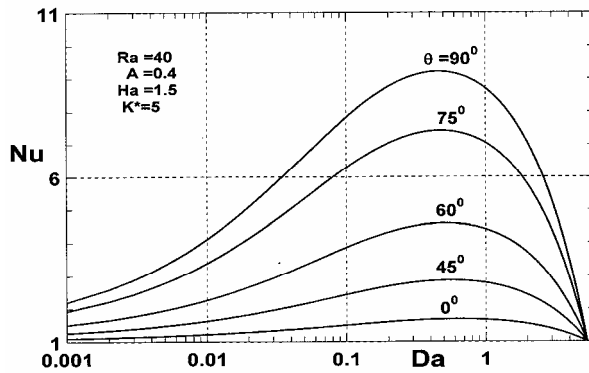


Figure 4.5: Effet de Da sur le taux de transfert de chaleur pour différentes valeurs de θ .

Pour de petits nombres de *Darcy* ($Da \rightarrow 0$) les effets de l'inclinaison θ des axes principaux du milieu poreux sur le transfert de chaleur sont peu significatifs ; le *Nusselt* tend asymptotiquement vers une valeur qui dépend de θ . Ainsi pour $\theta=90^\circ$, $Nu \approx 2.2$ et pour $\theta=75^\circ$, $Nu \approx 2$.

La valeur du nombre de *Darcy* Da pour atteindre le régime de conduction pure est indépendant de θ . Par exemple pour $Da \approx 10$, la conduction pure est atteinte.

Les effets de la variation du nombre de *Rayleigh* Ra sur le transfert de chaleur par convection dans le milieu poreux sont présentés à la Figure 4.6 pour $Da=0.05$, $A=0.5$, $K^*=5$, $\theta=15^\circ$ et pour différentes valeurs du nombre de *Hartmann* Ha .

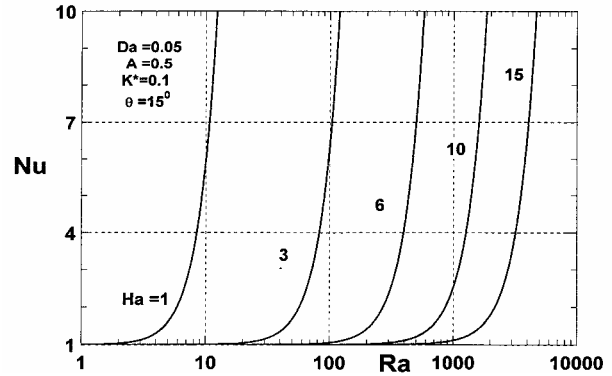


Figure 4.6: Effet de Ra sur le taux de transfert de chaleur pour différentes valeurs de Ha .

L'analyse des courbes révèle que le taux de transfert de chaleur par convection Nu , pour différentes valeurs du nombre de *Hartmann* Ha croît à partir du régime de conduction pure pour lequel $Nu=1$ lorsque Ra croît. Ainsi, pour des nombres de *Hartmann* Ha élevés, le transfert de chaleur par convection n'est possible que dans la limite des nombres de *Rayleigh* Ra élevés. Pour un même nombre de *Rayleigh*, l'augmentation du nombre de *Hartmann* atténue de façon significative le transfert de chaleur par convection. Ainsi, pour $Ra=100$, $Nu=6$ pour $Ha=3$ tandis que $Nu \approx 1$ pour $Ha=6$.

CONCLUSION

L'étude menée est relative à la convection naturelle dans une cavité rectangulaire confinée par un milieu poreux anisotrope et chauffée isothermiquement par les côtés. Cette cavité est soumise à l'action d'un champ magnétique transversal.

Il ressort de cette étude les conclusions suivantes :

- 1) l'écoulement convectif est grandement influencé par les paramètres d'anisotropie en perméabilité de la couche poreuse et par l'effet du champ magnétique transversal appliqué.
- 2) le taux de transfert de chaleur dans le milieu poreux croît lorsque la perméabilité dans la direction horizontale est plus élevée que celle régnant dans la direction verticale.
- 3) le taux de transfert de chaleur augmente progressivement lorsque l'angle d'inclinaison des axes principaux du milieu poreux croît. Ce taux de transfert

croît en passant du minimum à $\theta = 0^\circ$ à son maximum lorsque θ atteint la valeur 90° .

4) l'augmentation de l'intensité du champ magnétique transversal appliqué réduit de façon significative la

vitesse de l'écoulement du fluide saturant le milieu poreux et atténue de ce fait le transfert de chaleur par convection dans le milieu.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. DEGAN G., 1997.- *Etude Numérique et Analytique de la Convection Naturelle en Milieu Poreux Anisotrope*. Thèse de Philosophiae Doctor (Ph.D.) (Ecole Polytechnique de Montréal).
2. P. VASSEUR M., HASNAOUI E., BILGEN L. and ROBILLARD, 1993.- "Natural Convection in an Inclined Fluid Layer with a Transverse Magnetic Field : Analogy with a Porous Medium". *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117: 121-129.
3. WILKS G., 1976.- "Magnétohydrodynamic Free Convection About a Semi- infinite Vertical Plate in a Strong Cross Field". *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 27: 621-631.
4. TABELING P., 1982.- "Convective Flow Patterns Rectangular Boxes of Finite Extend Under an External Magnetic Field" *J. Physique*, Vol. 43: 1295-1303.
5. OZOE H. and MARUO E., 1993.- "Magnetic and Gravitational Natural Convection of Melted Silicon-Two-Dimensional Numerical Computation in Rate of Heat Transfer". *JSME International Journal*, Vol. 30: 774-784.
6. VENKATACHALAPPA M. and SUBBARAYA C. K., 1993.- "Natural Convection in a Rectangular Enclosure in the Presence of a Magnetic Field With Uniform Heat Flux From the Side Walls". *Acta Mechanica*, Vol. 96: 13-26.
7. GARANDET J. P. et ALBOUSSIÈRE T., 1992.- "Buoyancy Driven Convection in a Rectangular Enclosure With a Transverse Magnetic Field". *In J. Heat Mass Transfer*, 35(4): 741-748.
8. BIAN W., VASSEUR P., BILGEN E. and MENG F., 1996.- "Effect of an Electromagnetic Field on Natural Convection in an Inclined Porous Layer". *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17: 36-44.
9. BIRIKH R.V., 1996.- "Thermocapillary Convection in a Horizontal Layer of Liquid". *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 3: 69-72.
10. VASSEUR P. and ROBILLARD L., 1987.- "The Brinkman Model for Boundary- Layer Regime in a Rectangular Cavity With Uniform Heat Flux From The Side". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30: 717-727.
11. CORMACK D. E., LEAL L. G. and IMBERGER, 1974.- "Natural Convection in a Shallow Cavity With Differentially Heated End Walls. Part 1, Asymptotic Theory". *J. Fluid Mech.*, 65: 209-230.
12. OZOE H., and OKADA K., 1989.- "The Effect of the Direction of the External Magnetic Field on the Three - Dimensional Natural Convection in a Cubical Enclosure". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32: 1939-1954
13. BEJAN A., 1984.- *Convection Heat Transfer*. Wiley-Interscience Publication.
14. BEJAN A., 1985.- "The Method of Scale Analysis: Natural Convection in a Porous Medium". *In Natural Convection: Fundamentals and Applications*, S. Kakac et al. (eds), Hemisphere, Bristol P. A.
15. LAPWOOD E. R., 1948.- "Convection of a Fluid in a Porous Medium". *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44: 508-521.